

УДК 533.9

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОДОБИЯ ПРОФИЛЕЙ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ НА КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СТАДИИ РАЗРЯДОВ В ТОКАМАКЕ ГЛОБУС-М2

Г.С. Курский<sup>1</sup>, П.А. Сдвиженский<sup>2</sup>, Н.С. Жильцов<sup>1</sup>, Е.Е. Ткаченко<sup>1</sup>, Н.В. Теплова<sup>1</sup>, Г.А. Трошин<sup>1</sup>,  
А.К. Крыжановский<sup>1</sup>, А.Б. Кукушкин<sup>2,3</sup>, А.В. Соколов<sup>4</sup>, В.В. Волошинов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, С.-Петербург, Россия

<sup>2</sup>НИИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

<sup>4</sup>Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

Проведён статистический анализ подобия пространственных профилей температуры  $T_e$  и плотности  $n_e$  электронов на квазистационарной стадии электрического тока в плазме в 21 разряде в токамаке Глобус-М2. Анализ аналогичен проведённому ранее с данными токамака JET. Показано существование универсальных профилей  $T_e$  и  $n_e$  в зависимости от нормированного малого радиуса плазменного шнура  $\rho$ . Универсальные профили разряда (УПР) получают делением пространственно-временного профиля на его усреднённое по пространству значение в области  $\rho \leq \rho_{\max} = 0,5-1$  и последующим усреднением по времени. Универсальные профили установки (УПУ) получают путём дополнительного усреднения по времени всех разрядов. Показано, что во всех рассмотренных разрядах усреднённые по времени  $\bar{\sigma}_{T_e}$ , относительные среднеквадратичные отклонения профиля  $T_e$  от УПР и УПУ при  $\rho_{\max} = 0,8$  на радиусах  $\rho = 0,1-0,7$  не превышают 10%, при  $\rho = 0,9$  точность снижается. Аналогичные значения усреднённого по пространству  $\bar{\sigma}_{T_e}$  превышают 10% только в одной из 136 временных точек всех рассмотренных разрядов.

Аналогичная картина наблюдается для профилей  $n_e$ . Сравнение УПУ для  $T_e$  в JET и Глобус-М2 показало некоторое различие профилей, максимальное при небольших  $\rho$ . С помощью SvF-метода сбалансированной идентификации найдена точность представления  $T_e(\rho, t)$  как произведения двух функций только одной переменной, времени и координаты. Полученные результаты иллюстрируют высокую степень самоорганизации плазмы в токамаках.

**Ключевые слова:** токамак, статистический анализ, подобие профилей параметров плазмы, мультипликативное представление профилей, технология сбалансированной идентификации.

## STATISTICAL ANALYSIS OF SIMILARITY OF PLASMA PARAMETERS PROFILES AT QUASI-STATIONARY STAGE OF DISCHARGES IN GLOBUS-M2 TOKAMAK

G.S. Kurskii<sup>1</sup>, P.A. Sdvizhenskii<sup>2</sup>, N.S. Zhiltsov<sup>1</sup>, E.E. Tkachenko<sup>1</sup>, N.V. Teplova<sup>1</sup>, G.A. Troshin<sup>1</sup>,  
A.K. Kryzhanovsky<sup>1</sup>, A.B. Kukushkin<sup>2,3</sup>, A.V. Sokolov<sup>4</sup>, V.V. Voloshinov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Ioffe Physical Technical Institute, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia

<sup>3</sup>National Research Nuclear University MEPHI, Moscow, Russia

<sup>4</sup>Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute), Moscow, Russia

A statistical analysis of the similarity of spatial profiles of temperature  $T_e$  and electron density  $n_e$  at the quasi-stationary stage of electric current in plasma in 21 discharges in the Globus-M2 tokamak was carried out. The analysis is similar to that carried out earlier with JET tokamak data. The existence of universal profiles of  $T_e$  and  $n_e$  is shown depending on the normalized minor radius of the plasma column  $\rho$ . The discharge universal profiles (DUPs) are obtained by dividing the space-time-dependent profile by the space-averaged value of this parameter in the region  $\rho \leq \rho_{\max} = 0.5-1$ , and subsequent averaging over time at the quasi-stationary stage of each discharge. The machine universal profiles (MUPs) are obtained by additional averaging over time of all discharges. It is shown that in all considered discharges, the time-averaged  $\bar{\sigma}_{T_e}$ , the relative root-mean-square deviations of the  $T_e$  profile from the DUP and MUP, for  $\rho_{\max} = 0.8$  at radii  $\rho = 0.1-0.7$  do not exceed 10%, for  $\rho = 0.9$  accuracy decreases. Similar values of spatially averaged  $\bar{\sigma}_{T_e}$  exceed 10% only at one of 136 timepoints of all considered discharges. A similar picture is observed for  $n_e$  profiles. A comparison of the MUP for  $T_e$  in JET and Globus-M2 showed some difference in profiles, maximum at small  $\rho$ . Using the SvF-method of balanced identification, the accuracy of the representation of  $T_e(\rho, t)$  as the product of two functions of only one variable, time and coordinate, was found. The results obtained illustrate the high degree of plasma self-organization in tokamaks.

**Key words:** tokamak, statistical analysis, similarity of plasma parameter profiles, multiplicative representation of profiles, balanced identification technology.

DOI: 10.21517/0202-3822-2024-47-3-36-48

## ВВЕДЕНИЕ

Проведённый ранее статистический анализ [1] подобию профилей параметров плазмы (температуры  $T_e$ , плотности  $n_e$  и давления  $p_e$  электронов) на квазистационарной стадии тока плазмы (так называемая стадия flat-top — плато полного тороидального электрического тока в плазме) на токамаке JET показал высокую степень самоорганизации плазмы в токамаках и подтвердил на примере данных токамака JET гипотезу [2] (и её проверку в [3—6]) о существовании универсальных профилей параметров плазмы, характеризующих относительную форму пространственных профилей, получаемых путём нормировки профилей на их характерные значения, а именно значения в центре плазменного шнура или средние значения по большей части объёма плазмы. Результаты анализа [1] основаны на базе данных томсоновской диагностики высокого разрешения (high-resolution Thomson scattering, HRTS) с использованием улучшенного описания равновесия плазмы с помощью кода EFIT++ (так называемый код EFTP [7]).

В [1] было показано также, что поведение температуры  $T_e$ , в том числе сильные, до 100% по амплитуде, скачки, вызванные включением дополнительного нагрева плазмы на стадии плато тока, может быть приближённо описано с помощью усреднённой по пространственной переменной температуры, если для описания стационарной формы (но не абсолютных значений) пространственного профиля температуры используются найденные в [1] универсальные профили. Таким образом, гипотеза об универсальности нормированных профилей может быть исследована в терминах мультипликативного представления: пространственно-временная зависимость температуры может быть приближённо сведена к произведению функции только времени на функцию только координаты.

Большой интерес представляют проведение аналогичного анализа и проверка гипотезы о мультипликативном представлении по данным других установок. В настоящей работе анализируются данные, полученные в ходе экспериментов на токамаке Глобус-М2. В отличие от JET Глобус-М2 является компактным (большой радиус его вакуумной камеры составляет 0,36 м, в то время как на JET около 3 м) сферическим токамаком [8]. Основные результаты проводимых на установке исследований представлены в [9—12]. Установленная на токамаке Глобус-М2 высокоточная диагностика томсоновского рассеяния [13, 14] позволяет проводить измерения пространственных распределений температуры и плотности электронов плазмы с временным разрешением 15 нс. Недавний анализ [15] профилей  $T_e$  и  $n_e$  на квазистационарной стадии разряда в Глобус-М2 показал наличие универсальной связи  $T_e(\rho) = \text{const } n_e(\rho)^{1,65}$ . Это, как и можно было ожидать в силу отличия классического и сферического токамаков, отличается от связи  $T_e(\rho) = \text{const } n_e(\rho)^2$ , полученной в [6] и подтверждённой в [1] для значительной части плазменного шнура в JET. В настоящей работе мы используем ту же базу данных, что и в [15], таким образом продолжая линии исследований в [1] в дополнение к результатам [15].

При этом для обработки результатов измерений и проверки гипотезы о мультипликативном представлении уместно использовать SvF-технологии сбалансированной идентификации математических моделей [16, 17] (<https://github.com/distcomp/SvF>), в том числе её реализацию в виде приложения «svf-remote» (<https://optmod.distcomp.org/apps/vladimirv/svf-remote>), размещённого на платформе Everest (<https://optmod.distcomp.org>). SvF-технология позволяет осуществлять выбор математических моделей на основе баланса между сложностью и точностью соответствия имеющимся экспериментальным данным.

## ОПИСАНИЕ АНАЛИЗИРУЕМЫХ ДАННЫХ

Для статистического анализа подобию профилей температуры  $T_e$  и плотности электронов  $n_e$  плазмы использовались данные, полученные в ходе экспериментов на токамаке Глобус-М2 [8—12]. Измерения  $T_e$  и  $n_e$  проводились с помощью высокоточной диагностики томсоновского рассеяния [13, 14].

Анализируемый набор данных содержит информацию о зависимости параметров плазмы  $T_e$  и  $n_e$  от нормированного малого радиуса  $\rho$  плазменного шнура, являющегося меткой магнитной поверхности и определяемого относительно полоидального магнитного потока, и времени  $t$  в 33 разрядах с дополни-

тельным нагревом методом нейтральной инжекции. Отметим, что в проведённом анализе выбор радиальной координаты на основе полоидального магнитного потока является достаточным для анализа подобия профилей. Как показал анализ данных в токамаке JET, где также в основной базе данных используется малый радиус на основе полоидального магнитного потока, феномен подобия профилей сохраняется и в случае использования малого радиуса на основе тороидального магнитного потока, но сами профили немного меняются (см. раздел 3.6 в [1]). Количество моментов времени, по которым есть информация, отличается от разряда к разряду: для какого-то разряда данные могут быть только для одного момента времени, а для другого — до десяти.

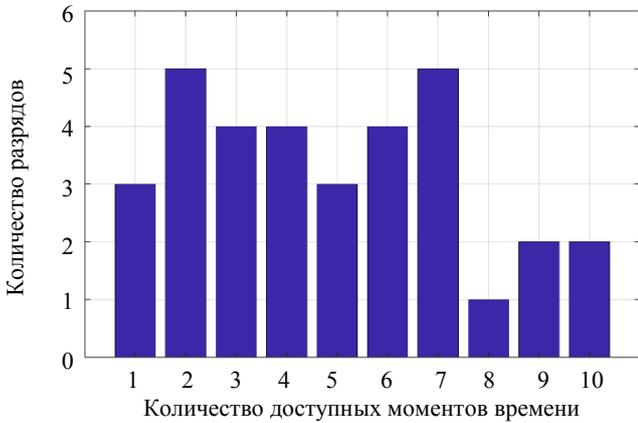


Рис. 1. Распределение разрядов по количеству моментов времени, по которым есть информация в анализируемом наборе данных

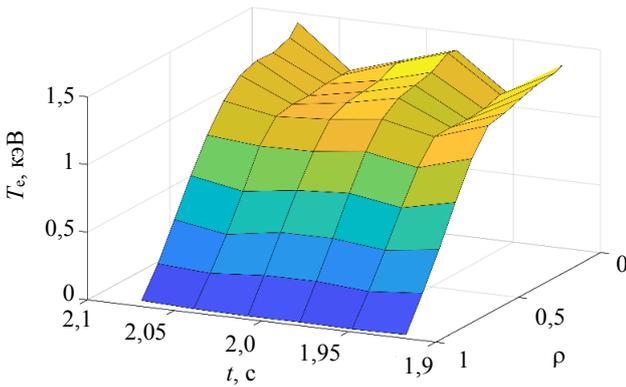


Рис. 2. Зависимость  $T_e$  от  $\rho$  и  $t$  в разряде № 41 629

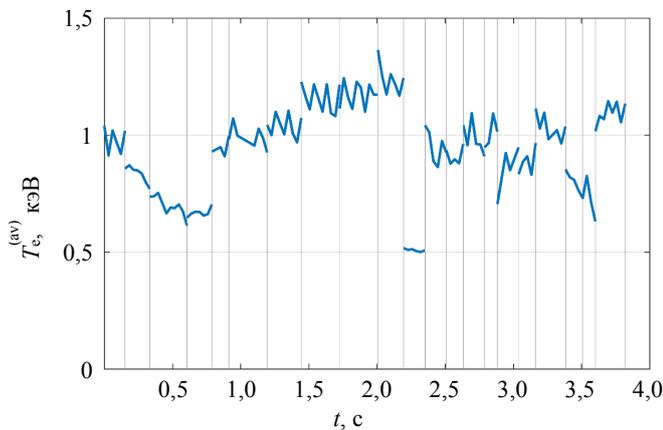


Рис. 3. Зависимость средних по объёму значений  $T_e^{(av)}$  (1) от времени,  $\rho_{max} = 0,8$ . В качестве начала отсчёта времени выбрана первая временная точка первого из рассмотренных разрядов, для которой имеются данные, затем последовательно добавлялись все остальные разряды. Границы разрядов обозначены вертикальными линиями

информация, отличается от разряда к разряду: для какого-то разряда данные могут быть только для одного момента времени, а для другого — до десяти. На рис. 1 показано распределение разрядов по количеству моментов времени, для которых доступны данные. Все временные точки соответствуют квазистационарной стадии разряда.

На рис. 1 видно, что в трёх разрядах есть данные только для одного момента времени, в пяти разрядах — для двух моментов времени и т.д. Поскольку дальнейший анализ предполагает применение усреднения по времени, будем рассматривать только те разряды, по которым есть данные для четырёх или больше моментов времени. Таким образом, остаётся 21 разряд с номерами 41 629, 41 644, 41 645, 41 756, 42 089, 42 094, 42 119, 42 121, 42 122, 42 123, 42 155, 42 325, 42 328, 42 341, 42 343, 42 362, 42 364, 42 368, 42 394, 42 404, 42 703.

Сетка по  $\rho$  обычно содержит 9 или 10 точек, более-менее равномерно расположенных на интервале  $[0, 1]$ . Положение точек меняется от разряда к разряду, поэтому для дальнейших расчётов данные были интерполированы на универсальную сетку по  $\rho$  от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1.

На рис. 2 в качестве примера показана зависимость  $T_e$  от  $\rho$  и  $t$  в одном из разрядов (разряд № 41 629, для этого разряда есть данные для шести точек по времени).

На рис. 3 показана зависимость от времени средних по части объёма значений температуры  $T_e^{(av)}$  для тех разрядов, по которым есть данные для четырёх или более точек по времени (21 разряд):

$$T_e^{(av)}(\rho_{max}, t, k) = \frac{2}{\rho_{max}^2} \int_0^{\rho_{max}} T_e(\rho_1, t, k) \rho_1 d\rho_1, \quad (1)$$

где  $k$  — номер разряда. На рис. 3 видно, что значения  $T_e^{(av)}$  могут отличаться более чем в 2 раза от разряда к разряду.

Ток плазмы  $I_p$  в рассматриваемых разрядах имеет значения в пределах 0,26—0,41 МА, торои-

дальнее магнитное поле  $B_t$  на оси плазменного шнура — в пределах 0,8—0,9 Тл. Распределения разрядов по максимальным значениям тороидального магнитного поля  $B_t$  и полного тока плазмы  $I_p$  показаны на рис. 4.

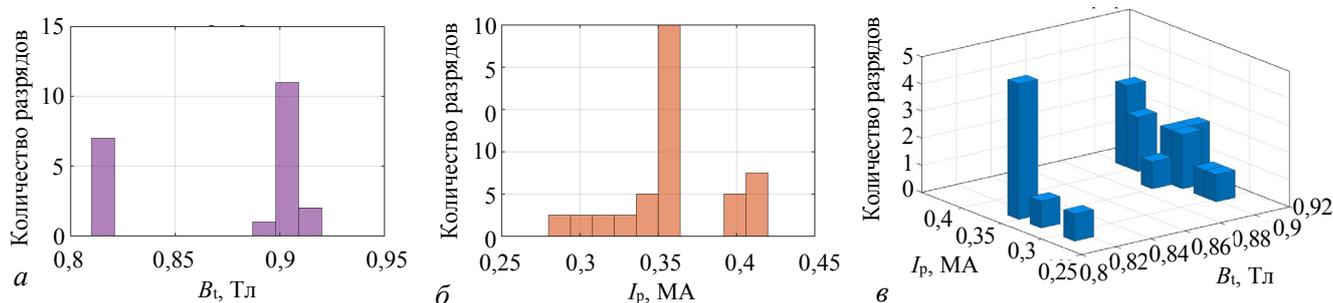


Рис. 4. Распределения разрядов по максимальным значениям тороидального магнитного поля  $B_t$  (а), полного тока плазмы  $I_p$  (б), совместное распределение по  $B_t$  и  $I_p$  (в), 21 разряд

## ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОДОБИЯ ПРОФИЛЕЙ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ

Основной целью статистического анализа подобия профилей параметра плазмы  $f$  (например,  $T_e$  и  $n_e$ ) [1] является определение точности утверждения о существовании профилей  $\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)$ , где  $k$  — номер разряда, получаемого путём деления профиля на среднее значение этого параметра в области  $\rho \leq \rho_{\max} = 0,5$ —1 и последующего усреднения по времени  $t$ . Таким образом, под подобием пространственного профиля некоторого параметра  $f(\rho, t)$  подразумевается, что профили, определённые как

$$G_f(\rho, t, \rho_{\max}, k) = f(\rho, t, k) \left[ \int_0^{\rho_{\max}} f(\rho_1, t, k) \rho_1 d\rho_1 \right]^{-1}, \quad 0 < \rho < \rho_{\max}, \quad (2)$$

являются слабыми функциями времени. Отметим, что ограничение  $\rho < \rho_{\max}$  при вычислении нормировочной константы в (2) не означает ограничения значений  $\rho$  (см. далее рис. 5 и 9). Такой выбор обусловлен стремлением уменьшить зависимость нормировочной константы от флуктуаций профилей вблизи границы плазменного шнура.

Чтобы оценить точность этого подобия, необходимо построить проекции этих функций на плоскость  $\{\rho, \rho\}$  и найти степень «размытости» этого набора функций относительно «центра тяжести» этого набора, т.е. относительно функции, которую уместно назвать универсальным профилем для данного разряда (УПР):

$$\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k) = \frac{1}{\Delta t(k)} \int_{t_0(k)}^{t_1(k)} G_f(\rho, t, \rho_{\max}, k) dt. \quad (3)$$

Здесь  $t_0(k)$  и  $t_1(k)$  — соответственно первая и последняя временные точки, для которых есть данные для  $k$ -го разряда,  $\Delta t(k) = t_1(k) - t_0(k)$ . Целесообразно характеризовать меру размытия относительным среднеквадратичным отклонением функций  $G_f(\rho, t, \rho_{\max}, k)$  от функции  $\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)$ :

$$\tilde{\sigma}_f(\rho, \rho_{\max}, k) = \sqrt{\frac{1}{\Delta t(k)} \int_{t_0(k)}^{t_1(k)} \left( \frac{G_f(\rho, t, \rho_{\max}, k)}{\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)} - 1 \right)^2 dt}. \quad (4)$$

Анализ функций  $\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)$  (3) позволит исследовать слабость временной зависимости отклонения нормированного профиля (2) от (3) для данного разряда. Анализ близости этих профилей для всех разрядов представляет большой интерес. Для этого можно ввести усреднение этих функций по всем исследованным разрядам:

$$\bar{\bar{G}}_f(\rho, \rho_{\max}) = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k), \quad (5)$$

и найти относительное среднеквадратичное отклонение функций  $\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)$  от функции  $\bar{\bar{G}}_f(\rho_{\max}, \rho)$ :

$$\tilde{\sigma}_f(\rho, \rho_{\max}) = \sqrt{\frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( \frac{\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)}{\overline{\overline{G}_f(\rho, \rho_{\max})}} - 1 \right)^2}. \quad (6)$$

Функцию (5) уместно назвать универсальным профилем установки (УПУ). Наличие такого профиля для токамака JET было показано на рис. 3 и 8 в [1] для соответственно электронного давления и температуры.

Формулы (3)—(6) позволяют проанализировать степень универсальности пространственных профилей параметра  $f(\rho, t)$  при отслеживании его динамики во времени. Аналогичным образом уместно проследить эволюцию усреднённого по пространству относительного отклонения формы пространственного профиля от универсальной для данного разряда:

$$\tilde{\sigma}_f(t, \rho_{\max}, k) = \sqrt{\frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \left( \frac{G_f(\rho, t, \rho_{\max}, k)}{\bar{G}_f(\rho, \rho_{\max}, k)} - 1 \right)^2 d\rho}. \quad (7)$$

Статистический анализ по формулам (2)—(7) проводился по данным тех разрядов, для которых есть данные для четырёх и более точек по времени (21 разряд).

### РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ

В этом разделе представлены результаты статистического анализа по формулам (2)—(7) для температуры электронов.

На рис. 5—7 видно, что значения относительного среднеквадратичного отклонения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho_{\max}, \rho, k)$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  на радиусах  $\rho = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  не превышают 10% во всех рассмотренных разрядах, при

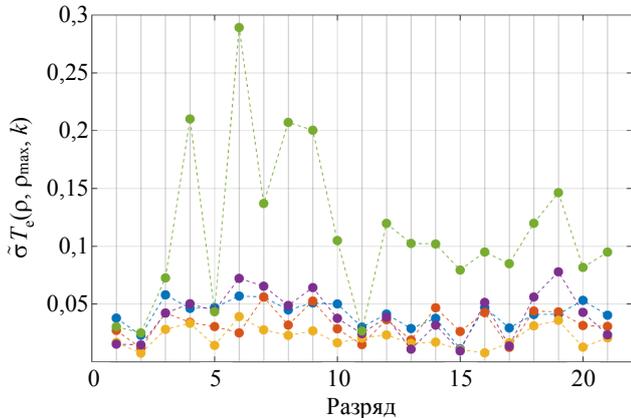


Рис. 5. Значения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho_{\max}, \rho, k)$  (4) для различных значений  $\rho$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  в различных разрядах:  $\rho = 0,1$  (•),  $0,3$  (•),  $0,5$  (•),  $0,7$  (•),  $0,9$  (•)

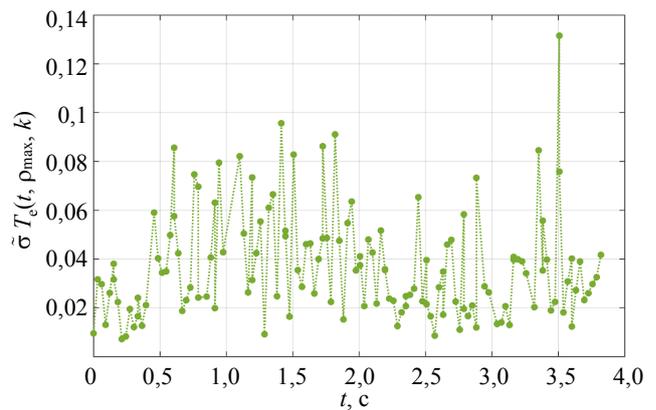


Рис. 6. Зависимость  $\tilde{\sigma}_{T_e}(t, \rho_{\max}, k)$  (7) от времени при  $\rho_{\max} = 0,8$ . Первая временная точка первого из рассмотренных разрядов, для которой имеются данные, была выбрана в качестве начала отсчёта времени, затем последовательно добавлены все остальные разряды

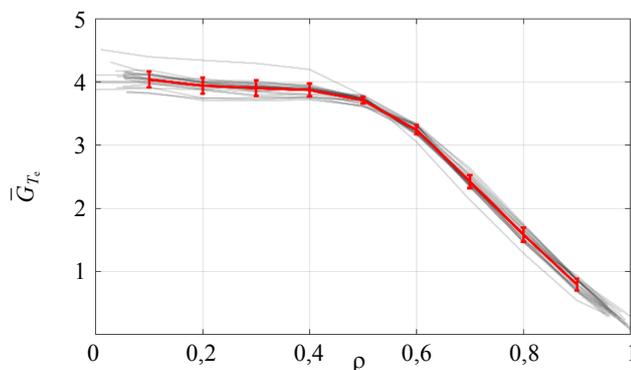


Рис. 7. Зависимость функций  $\bar{G}_{T_e}(\rho_{\max}, \rho, k)$  (3) (—) и  $\bar{G}_{T_e}(\rho_{\max}, \rho)$  (5) от  $\rho$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  для 21 разряда, в качестве погрешности отложено абсолютное стандартное отклонение, соответствующее относительному стандартному отклонению  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho_{\max}, \rho)$  (6)

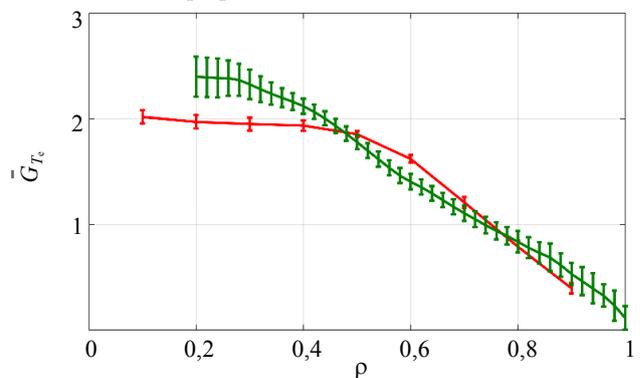


Рис. 8. Сравнение  $\bar{G}_{T_e}(\rho, \rho_{\max})$  (5) при  $\rho_{\max} = 0,8$  для Глобус-М2 (—) и для JET [1] (—)

$\rho = 0,9$  точность снижается, значения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  в большинстве разрядов превышают 10%, в четырёх разрядах — 20%. Значения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(t, \rho_{\max}, k)$  превышают 10% только в одной из 136 временных точек всех рассмотренных разрядов.

Сравнение на рис. 8 УПУ (5) для  $T_e$  в JET [1, рис. 8(b)] и Глобус-М2 показывает некоторое различие профилей, максимальное при небольших  $\rho$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

В этом разделе представлены результаты статистического анализа по формулам (2)—(7) для плотности электронов.

На рис. 9—11 видно, что значения относительного среднеквадратичного отклонения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  на радиусах  $\rho = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  не превышают 6% во всех рассмотренных разрядах, при  $\rho = 0,9$  точность, как и в случае температуры, снижается, однако значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  в большинстве разрядов не превышают 10%. Значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(t, \rho_{\max}, k)$  не превышают 5% на протяжении более чем 90% от суммарного времени всех рассмотренных разрядов.

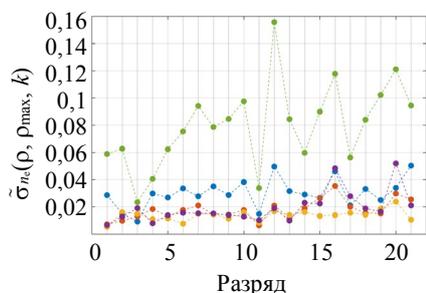


Рис. 9. Значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  (4) для различных значений  $\rho$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  в различных разрядах:  $\rho = 0,1$  (•),  $0,3$  (•),  $0,5$  (•),  $0,7$  (•),  $0,9$  (•)

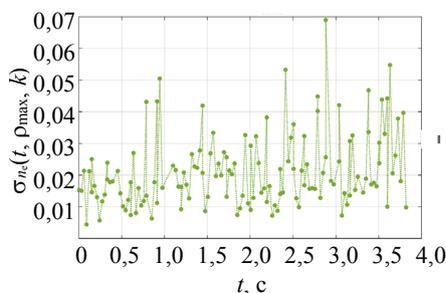


Рис. 10. Зависимость  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  (7) от времени при  $\rho_{\max} = 0,8$ . Первая временная точка первого из рассмотренных разрядов, для которой имеются данные, была выбрана в качестве начала отсчёта времени, затем последовательно добавлены все остальные разряды

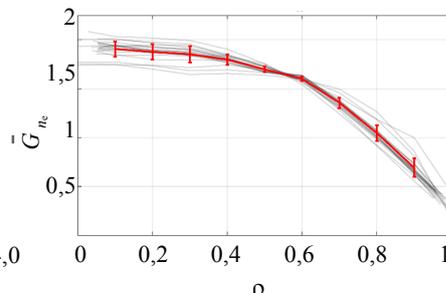


Рис. 11. Зависимость функций  $\bar{G}_{n_e}(\rho, \rho_{\max}, k)$  (3) (—) и  $\bar{G}_{n_e}(\rho, \rho_{\max})$  (5) от  $\rho$  при  $\rho_{\max} = 0,8$  для 21 разряда. В качестве погрешности отложено абсолютное стандартное отклонение, соответствующее относительному стандартному отклонению  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{\max})$  (6)

### ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОМОЩЬЮ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Ранее в [1] было показано, что поведение температуры  $T_e$ , в частности, сильные, до 100% по амплитуде, скачки, вызванные включением дополнительного нагрева плазмы на стадии плато тока, могут быть описаны скачками усреднённой по пространственной переменной температуры, если для описания стационарной формы (но не абсолютных значений) пространственного профиля температуры используется  $\bar{G}_{T_e}(\rho, \rho_{\max}, t)$ :

$$T_e^{(uni)}(\rho, t, \rho_{\max}, k) \equiv \bar{G}_{T_e}(\rho, \rho_{\max}, k) \int_0^{\rho_{\max}} T_e(\rho_1, t, k) \rho_1 d\rho_1. \quad (8)$$

На рис. 12 показано сравнение  $T_e^{(uni)}$  с исходными данными о  $T_e$  на примере разряда № 42 121.

Как видно из определений  $T_e^{(uni)}$  (8) и  $G_f$  (2), относительное среднеквадратичное отклонение

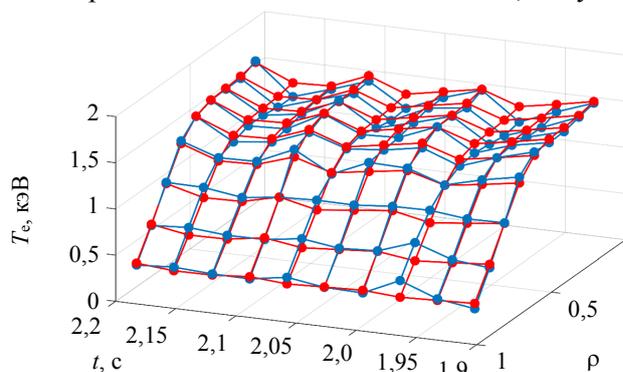


Рис. 12. Сравнение  $T_e^{(uni)}$  (8) (□) при  $\rho_{\max} = 0,8$  с исходными данными о  $T_e$  (□) в разряде № 42 121

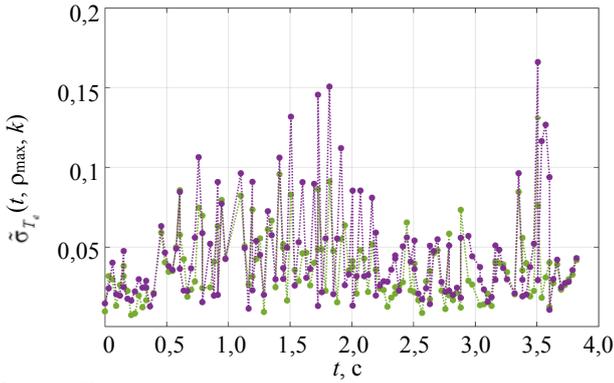


Рис. 13. Сравнение относительного среднеквадратичного отклонения  $T_c^{(uni)}$  от исходных данных о температуре  $\tilde{\sigma}_f(t, \rho_{max}, k)$ , если в определении  $T_c^{(uni)}$  (8) использовать  $\bar{G}_{T_c}$  (•) или  $\overline{\overline{G}}_{T_c}$  (•)

### ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Представление  $T_c(\rho, t)$  в форме (8), рассмотренное в предыдущем разделе, является, по сути, мультипликативным: пространственно-временная зависимость температуры  $T_c(\rho, t)$  может быть приближенно сведена к произведению функции только времени  $t$  на функцию только координаты  $\rho$ . Таким образом, гипотеза об универсальности нормированных профилей может быть исследована в терминах мультипликативного представления

$$T_c(\rho, t) = M_\rho(\rho)M_t(t), \quad M(0,5) = 1, \quad (9)$$

где для функций в правой части размерность и нормировка являются произвольными.

Для оценки точности гипотезы о мультипликативном представлении (9) воспользуемся технологией сбалансированной идентификации SvF (Simplicity vs Fitting) [16, 17] (<https://github.com/distcomp/SvF>), которая позволяет осуществлять выбор математических моделей на основе баланса между сложностью и точностью соответствия имеющимся экспериментальным данным. В основе технологии лежат такие процедуры: 1) создание набора (параметрических) семейств моделей, пригодных для удовлетворительного воспроизведения измерений (например, вариация методов аппроксимации дискретных входных экспериментальных или синтетических данных непрерывными функциями или вариация математических моделей генерации входных данных); 2) формализация понятия сложности модели (для выбранного семейства); 3) процедура перекрёстной проверки для оценки погрешности моделирования измерений; 4) поиск оптимального компромисса между сложностью модели и близостью к измерениям на основе минимизации погрешности моделирования измерений. Технология сбалансированной идентификации SvF позволяет автоматизировать процесс построения математических моделей на основе использования специального программного обеспечения и мощных вычислительных ресурсов (кластеров). Результатом её применения являются выбор математической модели с оптимальным балансом сложности и близости её траектории к экспериментальным данным, оценки надёжности данных и погрешностей моделирования, графические и числовые результаты моделирования исследуемого объекта. При проведении масштабных расчётов уместно использовать реализацию технологии в виде приложения «svf-remote» (<https://optmod.distcomp.org/apps/vladimirv/svf-remote>), размещённого на платформе Everest (<http://everest.distcomp.org/>), а также приложения SSOP (<https://optmod.distcomp.org/apps/vladimirv/solve-set-opt-probs>), позволяющего одновременно решать набор оптимизационных задач на вычислительных ресурсах, подключённых к системе <https://optmod.distcomp.org/>.

Идея проверки гипотезы о мультипликативном представлении (9) состоит в следующем утверждении: при добавлении в модель дополнительного правильного знания (математического утверждения, гипотезы) погрешность моделирования должна уменьшаться (не возрастать). И наоборот, если дополнительная гипотеза не верна, погрешность будет увеличиваться.

Реализуем такую проверку следующим образом: сначала рассчитаем погрешности моделирования (в данном случае — аппроксимации экспериментальных данных непрерывными функциями) данных для

$T_c^{(uni)}$  от исходных данных о температуре совпадает с  $\tilde{\sigma}_f(t, \rho_{max}, k)$  (7). Рассчитаем аналогичное отклонение, если в определении  $T_c^{(uni)}$  (8) использовать  $\bar{G}_{T_c}(\rho, \rho_{max})$  (5) вместо  $\bar{G}_{T_c}(\rho, \rho_{max}, k)$  (3). Результаты расчётов показаны на рис. 13.

Как и следовало ожидать, отклонение от УПР (3), т.е. в пределах одного разряда, меньше, чем отклонение от УПУ (5), т.е. в пределах времён всех рассмотренных разрядов, однако это отличие не является значительным.

$T_e(\rho, t)$ , а затем погрешности моделирования  $T_e(\rho, t)$  с дополнительным условием (9). Под моделированием  $T_e$  здесь понимается минимизация критерия идентификации (функционала)

$$F(T_e^{\text{SVF}}, \alpha) = \sum_{i,k} ((T_e)_{i,k} - T_e^{\text{SVF}}(t_i, \rho_k))^2 + \iint \left[ \alpha_t^2 \left( \frac{\partial^2 T_e^{\text{SVF}}}{\partial t^2} \right)^2 + 2\alpha_t \alpha_\rho \left( \frac{\partial^2 T_e^{\text{SVF}}}{\partial t \partial \rho} \right)^2 + \alpha_\rho^2 \left( \frac{\partial^2 T_e^{\text{SVF}}}{\partial \rho^2} \right)^2 \right] dt d\rho \rightarrow \min_{T_e^{\text{SVF}}(\cdot)} \quad (10)$$

Первое слагаемое в (10) характеризует близость модели к исходным данным о  $T_e$  (среднеквадратичное отклонение), второе слагаемое — сложность модели как кривизну функции  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$ , интегралы квадратов вторых производных, взвешенных с весами  $\alpha_\rho > 0$  и  $\alpha_t > 0$ . Выбор оптимальных весов  $\alpha$  проводится путём минимизации оценки погрешности решения, полученной на основе процедуры перекрёстного оценивания (cross-validation).

Результаты применения метода SvF на примере разрядов № 42 121 и № 42 328 показаны на рис. 14—17.

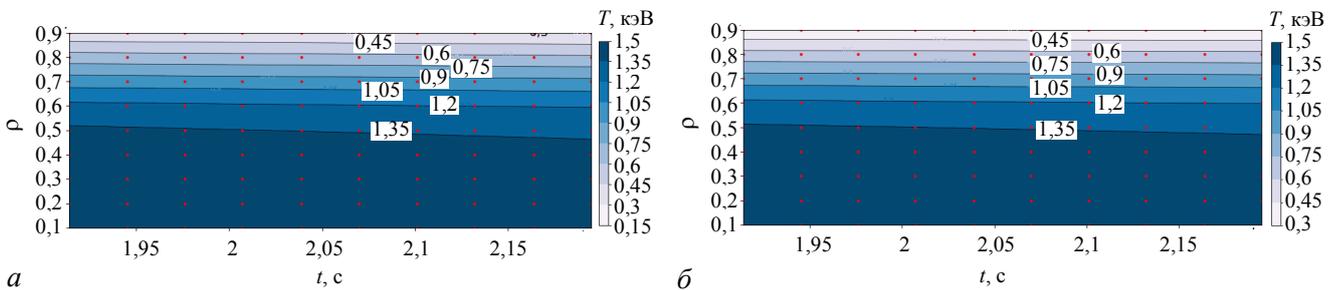


Рис. 14. Вид  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  в разряде № 42 121: выполнялось моделирование только  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  (а), выполнялось моделирование  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  с дополнительным требованием мультипликативного представления (9) (б)

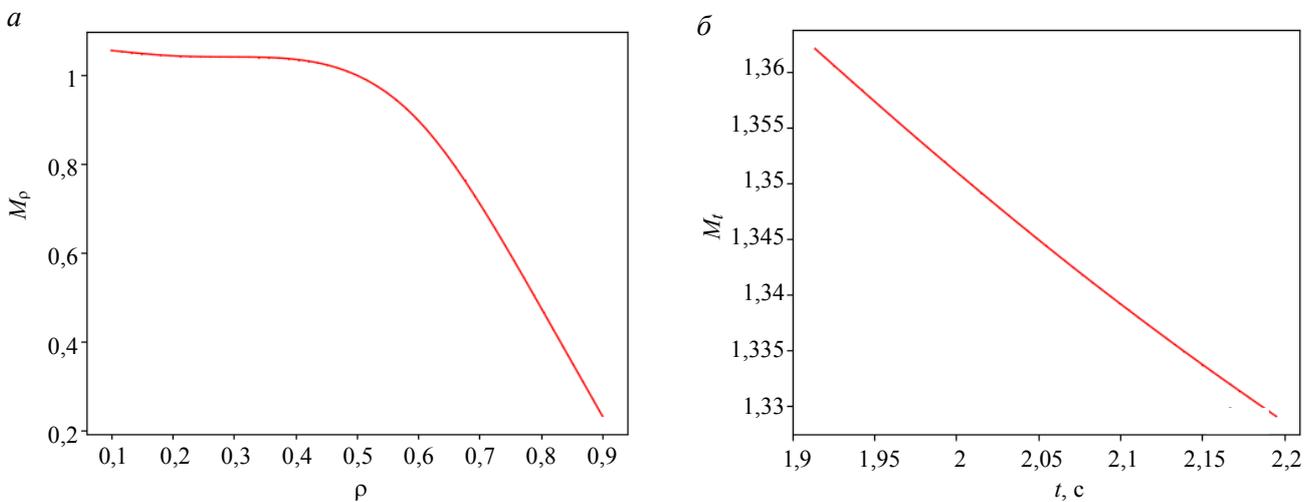


Рис. 15. Компоненты мультипликативного представления (9) для разряда № 42 121:  $M_\rho(\rho)$  (а);  $M_t(t)$  (б)

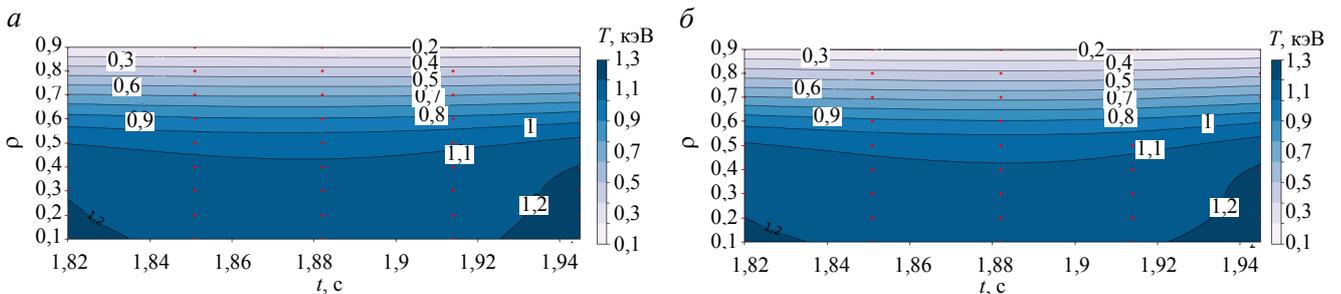


Рис. 16. Вид  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  в разряде № 42 328: выполнялось моделирование только  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  (а); выполнялось моделирование  $T_e^{\text{SVF}}(t, \rho)$  с дополнительным требованием мультипликативного представления (9) (б)

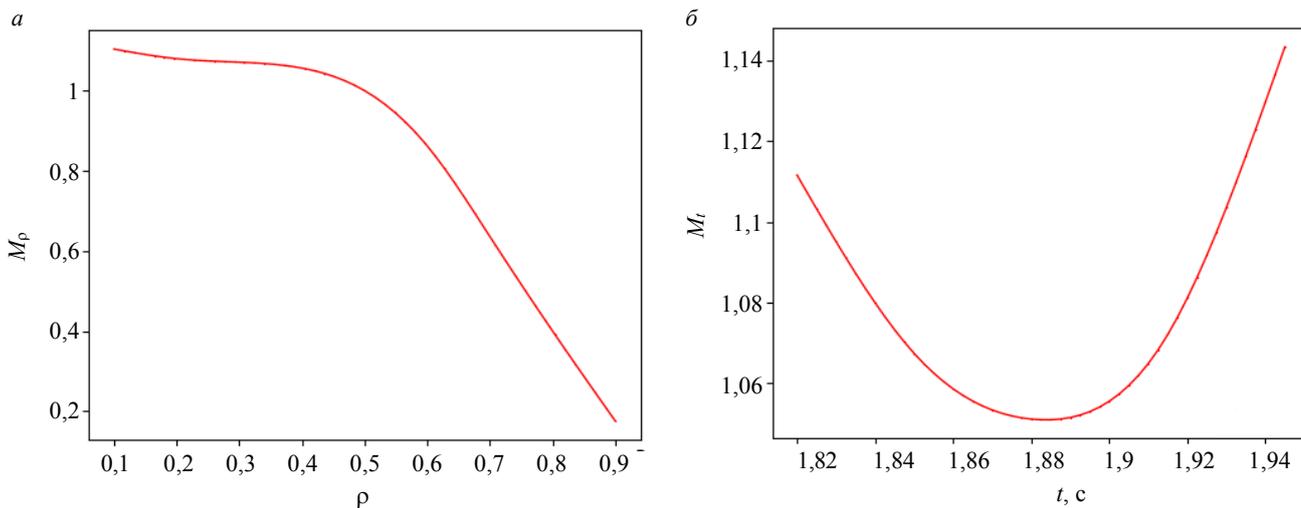


Рис. 17. Компоненты мультипликативного представления (9) для разряда № 42 328:  $M_\rho(\rho)$  (а);  $M_t(t)$  (б)

В табл. 1 приведены погрешности моделирования  $T_e$  в разрядах № 42 121 и № 42 328.

Т а б л и ц а 1. Погрешности моделирования  $T_e$

Разряд	Показатель	Обычная модель, %	Мультипликативная модель, %
№ 42 121	$\sigma_{cv}$	26,86	27,23
	rmsd	21,98	21,77
№ 42 328	$\sigma_{cv}$	22,07	21,89
	rmsd	7,56	7,25

**Примечание:** rmsd — стандартное отклонение модели от исходных данных в процентах от исходной дисперсии;  $\sigma_{cv}$  — средне-квадратичная ошибка перекрёстной проверки в процентах от исходной дисперсии (погрешность моделирования данных).

Из табл. 1 видно, что при добавлении условия мультипликативности (9) погрешность  $\sigma_{cv}$  моделирования температуры и отклонение от исходных данных остаются практически такими же. Это позволяет сделать вывод, что гипотеза о мультипликативном представлении (9) является приемлемой.

Далее приведём результаты аналогичного анализа всех разрядов. Здесь рассмотрены три случая, включая два рассмотренных случая для двух разрядов и случай моделирования с дополнительным условием в виде аддитивного представления

$$T_e(\rho, t) = A_\rho(\rho) + A_t(t), \tag{11}$$

актуальность которого кратко обсуждена в конце этого раздела.

Отметим существенное изменение размерности при переходе от задачи моделирования без дополнительных условий (рис. 18, 443×50 неизвестных) к задачам моделирования с дополнительным условием — гипоте-

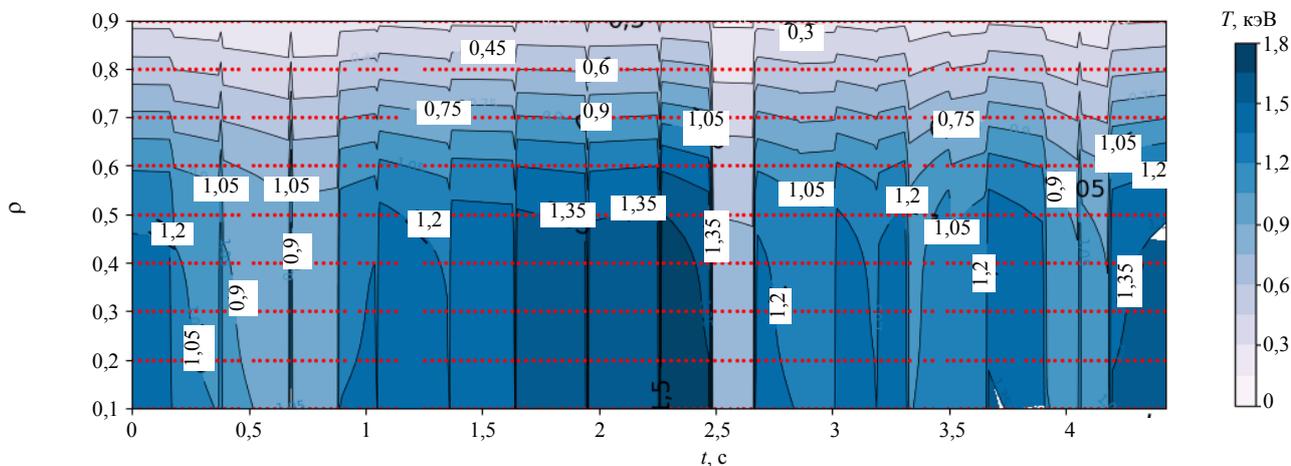


Рис. 18. Линии уровня функции  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  и результаты измерений (•••) для всех рассмотренных разрядов на единой последовательной шкале времени. Выполнялось только моделирование  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  без дополнительных условий. Размерность задачи 443×50 неизвестных

зой мультипликативности (9) (рис. 19, 20) или аддитивности (11) (рис. 21, 22) (в обоих случаях 443 + 50 неизвестных), в которых множество допустимых решений уменьшилось кардинально. Если при этом мы не пренебрегли чем-то существенным, то погрешности не должны сильно возрасти (табл. 2).

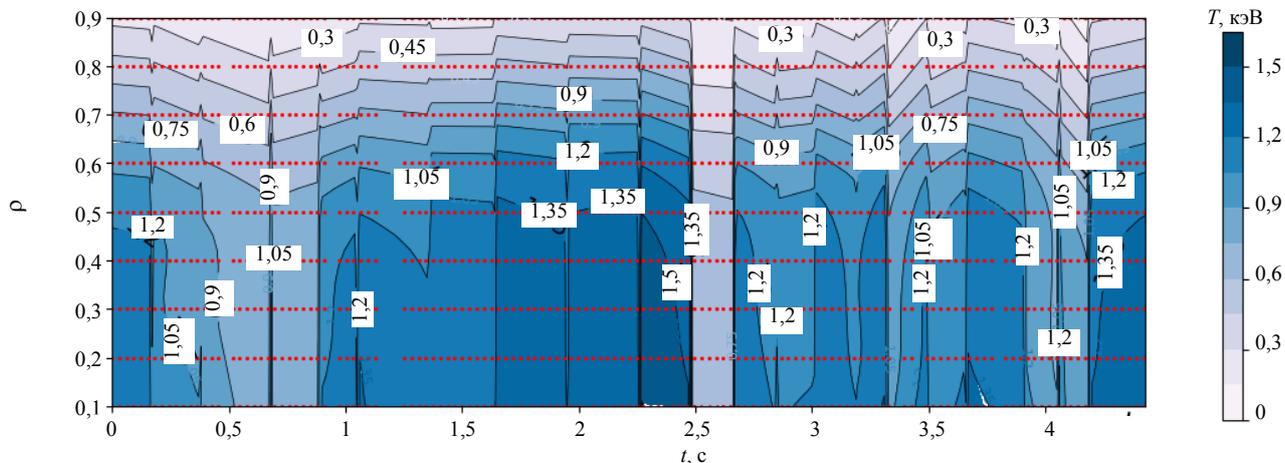


Рис. 19. Линии уровня функции  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  и результаты измерений (•••) для всех рассмотренных разрядов на единой последовательной шкале времени. Выполнялось моделирование  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  с дополнительным условием (9) (гипотеза мультипликативности). Размерность задачи 443 + 50 неизвестных

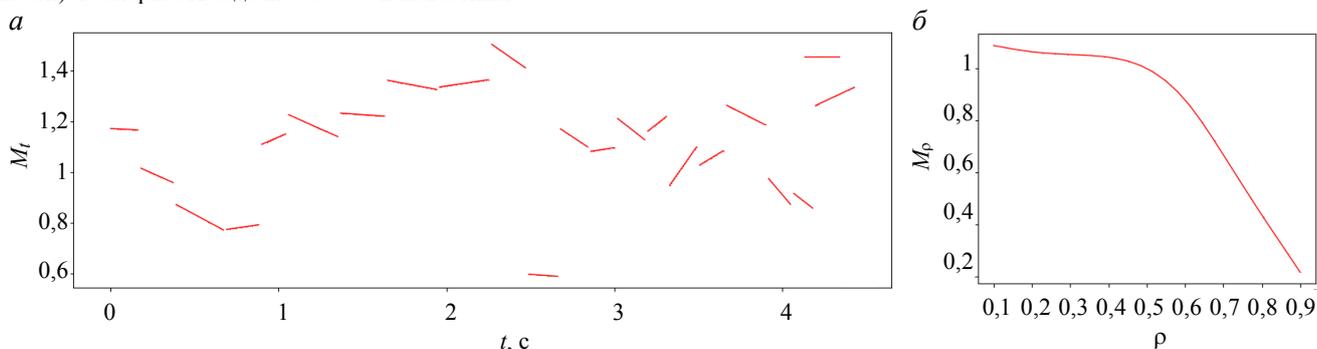


Рис. 20. Компоненты мультипликативного представления (9), соответствующие результатам на рис. 19, для всех рассмотренных разрядов на единой последовательной шкале времени:  $M_t(t)$  (а);  $M_\rho(\rho)$  (б)

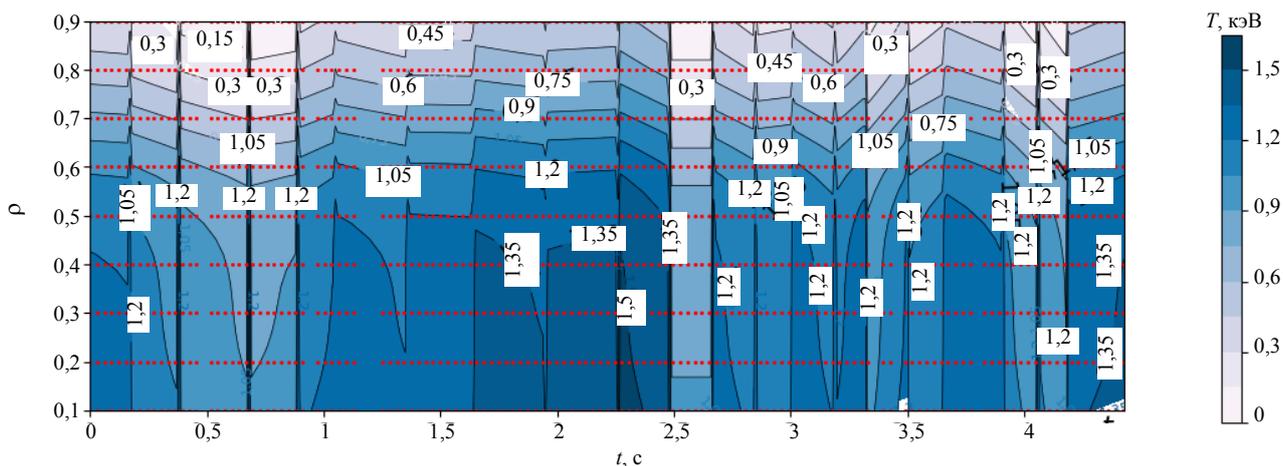


Рис. 21. Линии уровня функции  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  и результаты измерений (•••) для всех рассмотренных разрядов на единой последовательной шкале времени. Выполнялось моделирование  $T_e^{SVF}(\rho, t)$  с дополнительным условием (11) (гипотеза аддитивности). Размерность задачи 443+50 неизвестных

При добавлении условия мультипликативности погрешность кроссвалидации  $\sigma_{CV}$  уменьшилась, среднее квадратичное отклонение  $rmsd$  возросло. Гипотеза представляется приемлемой. Дополнительное условие существенно сократило множество допустимых решений, были отброшены лишние, несущественные части.

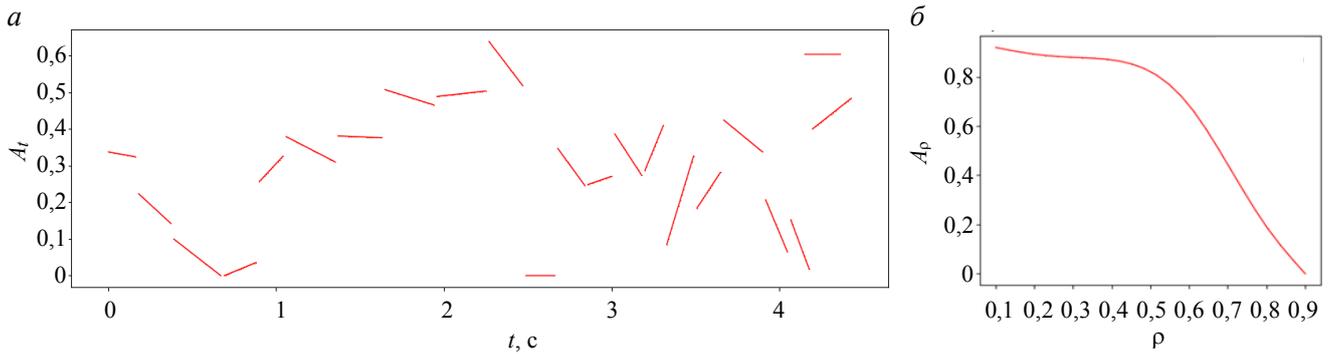


Рис. 22. Компоненты аддитивного представления (11), соответствующие результатам на рис. 21, для всех рассмотренных разрядов на единой последовательной шкале времени:  $A_t(t)$  (а);  $A_p(\rho)$  (б)

Т а б л и ц а 2. Погрешности моделирования  $T_e$  по данным многих разрядов

Модель	$\sigma_{CV}, \%$	rmsd, %
$T(t, \rho)$	27,35	17,00
$T = M_t(t) \times M_p(\rho)$	24,42	18,56
$T = A_t(t) + A_p(\rho)$	31,81	25,15

При переходе к случаю гипотезы аддитивности погрешности ощутимо возрастают. Множество допустимых решений в меньшей степени соответствует решению задачи, гипотеза аддитивности представляется ощутимо менее приемлемой.

Отметим, что гипотеза аддитивности близка к такой физической модели, когда в результате L—H-перехода происходит в подавляющей части плазменного шнура, вплоть до внешнего транспортного барьера, поднятие профиля давления на постоянную по  $\rho$  величину [4, рис. 1]. Видно, что такая модель является вполне рациональной, но всё же в рассматриваемых нами экспериментах менее вероятной по сравнению с сохранением профиля в режиме мультипликативности, а не аддитивности.

## ВЫВОДЫ

Проведён статистический анализ подобию профилей температуры и плотности электронов плазмы по данным о пространственно-временных распределениях этих параметров, полученным с помощью высокоточной диагностики томсоновского рассеяния в ходе экспериментов на токамаке Глобус-М2. Проведённый анализ показал высокую степень универсальности полученных нормированных профилей. В случае температуры электронов значения относительного среднеквадратичного отклонения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho, \rho_{max}, k)$  при  $\rho_{max} = 0,8$  на радиусах  $\rho = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  не превышают 10% во всех рассмотренных разрядах, при  $\rho = 0,9$  точность снижается, значения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(\rho, \rho_{max}, k)$  в большинстве разрядов превышают 10%, в четырёх разрядах — 20%. Значения  $\tilde{\sigma}_{T_e}(t, \rho_{max}, k)$  превышают 10% только в одной из 136 временных точек всех рассмотренных разрядов. В случае плотности электронов значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{max}, k)$  при  $\rho_{max} = 0,8$  на радиусах  $\rho = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  не превышают 6% во всех рассмотренных разрядах, при  $\rho = 0,9$  точность, как и в случае температуры, снижается, однако значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(\rho, \rho_{max}, k)$  в большинстве разрядов не превышают 10%. Значения  $\tilde{\sigma}_{n_e}(t, \rho_{max}, k)$  не превышают 5% на протяжении более чем 90% от суммарного времени всех рассмотренных разрядов.

Отметим, что в случае экспериментов с интенсивным пространственно-локализованным электронным циклотронным нагревом в токамаках наблюдается эффект деформации формы профилей температуры и плотности (density pump-out) при сохранении профиля давления [4]. В рассмотренных нами экспериментах на токамаках JET и Глобус-М2 нет такой локализации нагрева, хотя по теоретическим предсказаниям пространственные профили плотности мощности нагрева весьма неоднородны (нейтральная инжекция, ионный циклотронный и небольшой нижнегибридный нагрев в JET, а также

нейтральная инжекция в Глобус-М2). В этом случае оба профиля — электронной температуры и плотности — сохраняют свою форму (более подробный анализ подобия и сохранения формы профилей температуры и плотности электронов проведён в [1]).

С помощью SvF-технологии сбалансированной идентификации выполнена проверка гипотезы о мультипликативном представлении температуры электронов. Показано, что при добавлении условия мультипликативности к процедуре представления дискретного набора экспериментальных данных гладкими функциями погрешность такого представления (моделирования) температуры электронов не возрастает или возрастает незначительно. Это позволяет сделать вывод, что гипотеза о мультипликативном представлении для температуры является приемлемой.

Полученные результаты иллюстрируют высокую степень самоорганизации плазмы в токамаках.

В работе использованы экспериментальные данные, полученные на УНУ «Сферический токамак Глобус-М», входящей в состав ФЦКП «Материаловедение и диагностика в передовых технологиях» ФТИ им. А.Ф. Иоффе. Эксперименты по нагреву плазмы токамака Глобус-М2 с помощью нейтральной инжекции выполнены в рамках проекта FFUG-2021-0001. Измерение пространственных распределений температуры и концентрации электронов плазмы токамака Глобус-М2, а также обработка результатов эксперимента выполнены в рамках проекта FFUG-2024-0028.

Теоретическая часть работы выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» (принципы статистического анализа) и при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00317 (<https://rscf.ru/project/22-11-00317/>) (расчёты по технологии SvF). Часть результатов получена с использованием услуг Центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт». Авторы признательны В.С. Неверову за плодотворное сотрудничество в работе [1].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kukushkin A.B., Sdvizhenskii P.A., Flanagan J., Kos D., Neverov V.S., Szepesi G., Taylor D.M.A., JET Contributors.** Statistical analysis of similarity of plasma parameters profiles at quasi-stationary stage of discharge in JET tokamak. — *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2023, vol. 65, № 7, p. 075009; <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6587/acd71e>.
2. **Coppi B.** — *Comments Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1980, vol. 5, p. 261—70.
3. **Esipchuk Y.V., Razumova K.A.** Investigation of plasma confinement on Soviet tokamaks. — *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1986, vol. 28, № 9A, p. 1253; <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0741-3335/28/9A/005/meta>.
4. **Razumova K.A. et al.** The main features of self-consistent pressure profile formation. — *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2008, vol. 50, № 10, p. 105004; <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0741-3335/50/10/105004/meta>.
5. **Dnestrovskij Y.N., Dnestrovskij A.Y., Lysenko S.E.** Self-organization of plasma in tokamaks. — *Plasma Physics Reports*, 2005, vol. 31, p. 529—553; <https://link.springer.com/article/10.1134/1.1992581>.
6. **Dnestrovskij Y.N.** Self-Organization of Hot Plasmas: the Canonical Profile Transport Model. — Springer, 2014.
7. **Szepesi G. et al.** — In: 47th EPS Conference on Plasma Physics, P3.1037, 2021.
8. **Minaev V.B. et al.** Spherical tokamak Globus-M2: design, integration, construction. — *Nuclear Fusion*, 2017, vol. 57, № 6, p. 066047.
9. **Petrov Y.V. et al.** Overview of Globus-M2 spherical tokamak results at the enhanced values of magnetic field and plasma current. — *Ibid.*, 2022, vol. 62, № 4, p. 042009.
10. **Kurskiev G.S. et al.** Tenfold increase in the fusion triple product caused by doubling of toroidal magnetic field in the spherical tokamak Globus-M2. — *Ibid.*, 2021, vol. 61, № 6, p. 064001.
11. **Kurskiev G.S. et al.** Energy confinement in the spherical tokamak Globus-M2 with a toroidal magnetic field reaching 0.8 T. — *Ibid.*, 2021, vol. 62, № 1, p. 016011.
12. **Bakharev N.N. et al.** TAE-induced fast ion losses and transport at the Globus-M/M2 spherical tokamaks. — *Physics of Plasmas*, 2023, vol. 30, № 7, p. 072507.
13. **Курскиев Г.С. и др.** Измерение температуры электронов плазмы токамака Глобус-М2 методом мультиметрического рассеяния. — *Письма в ЖТФ*, 2021, т. 47, № 24, с. 41—45.
14. **Zhiltsov N.S. et al.** <https://arxiv.org/abs/2311.18723>; arXiv:2311.18723 [physics.plasm-ph]; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.18723>.
15. **Курскиев Г.С., Яньков В.В. и др.** — *Письма в ЖЭТФ*, 2024, т. 119, с. 34.
16. **Sokolov A.V., Voloshinov V.V.** Model selection by balanced identification: the interplay of optimization and distributed computing. — *Open Computer Science*, 2020, vol. 10, № 1, p. 283—295; <https://doi.org/10.1515/comp-2020-0116>.
17. **Sokolov A.V., Voloshinov V.V.** Choice of mathematical model: balance between complexity and proximity to measurements. — *International J. of Open Information Technologies*, 2018, vol. 6, № 9, p. 33—41; <http://www.injoit.ru/index.php/j1/article/view/612>.



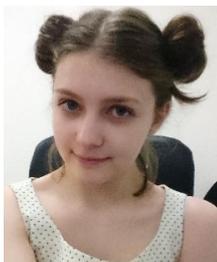
Глеб Сергеевич Курский, с.н.с., к.ф.-м.н.; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия  
gleb.kurskiy@gmail.com



Петр Александрович Сдвиженский, в.н.с., к.ф.-м.н.; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия  
Sdvizhenskii\_PA@nrcki.ru



Никита Сергеевич Жильцов, н.с.; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия  
nikita.zh@mail.ioffe.ru



Екатерина Евгеньевна Ткаченко, м.н.с.; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия



Наталья Витальевна Теплова, с.н.с., к.ф.-м.н.; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия



Григорий Александрович Трошин, м.н.с.; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия



Александр Константинович Крыжановский, программист; ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26, Россия



Александр Борисович Кукушкин, в.н.с., д.ф.-м.н.; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия; профессор; НИЯУ МИФИ, 115409 Москва, Каширское ш. 31, Россия  
Kukushkin\_AB@nrcki.ru



Александр Витальевич Соколов, в.н.с., к.ф.-м.н.; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, 127994 Москва, Б. Каретный пер. 19, Россия  
alexander.v.sokolov@gmail.com



Владимир Владимирович Волошинов, в.н.с., к.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, 127994 Москва, Б. Каретный пер. 19, Россия  
vladimir.voloshinov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 1 июля 2024 г.

После доработки 4 июля 2024 г.

Принята к публикации 5 июля 2024 г.

Вопросы атомной науки и техники.

Сер. Термоядерный синтез, 2024, т. 47, вып. 3, с. 36—48.