

УДК 533.9:519.688

**TOREQ — КОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ  
ГРЭДА—ШАФРАНОВА В ПЛАЗМЕ С ФИКСИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ***Ю.В. Готт**НИИ «Курчатовский институт», Москва, Россия*

Дано описание кода TOREQ (Toroidal Equilibrium) для решения уравнения Грэда—Шафранова, примененного для токамака с любым аспектным отношением, с любой (положительной и отрицательной) треугольностью, любой вытянутостью с фиксированной D-образной границей или границей с X-точкой, с любыми произвольными функциями в правой части уравнения. Приведено сравнение результатов расчётов новым кодом равновесных параметров с опубликованными данными.

**Ключевые слова:** численный код, уравнение Грэда—Шафранова, токамак, плазма, МГД-равновесие.

**TOREQ — A CODE FOR SOLVING THE GRAD—SHAFRANOV EQUATION  
IN PLASMA WITH A FIXED BOUNDARY***Yu.V. Gott**NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia*

A description of a simple TOREQ (Toroidal Equilibrium) code for solving the Grad—Shafranov equation, applicable for a tokamak with any aspect ratio, any (positive and negative) triangularity, any elongation with a fixed D-shaped or with X-point boundary, with any arbitrary functions on the right-hand side of the equation is given. A comparison of the results of calculations of equilibrium parameters with published data is given.

**Key words:** numerical code, Grad-Shafranov equation, tokamak, plasma, MHD equilibrium.

DOI 10.21517/0202-3822-2024-47-3-108-116

**ВВЕДЕНИЕ**

Для управления формой плазмы, положением плазменного шнура, её МГД-устойчивостью и переносами в термоядерной установке типа токамак необходимо знать равновесные распределения давления и плотности продольного тока в плазменном шнуре. Такие данные особенно важны для вытянутых по вертикали устройств.

В настоящей работе описан код, предназначенный для численного решения уравнения Грэда—Шафранова (ГШ) [1—3] для равновесия плазмы с фиксированной границей в токамаке, что позволяет рассчитывать такие равновесные параметры плазмы, как магнитный поток  $\psi$ , профиль давления плазмы  $p$  и профиль распределения плотности продольного тока  $J_{\parallel}$ , коэффициент запаса устойчивости  $q$ .

Краткий обзор существующих кодов для расчёта равновесия плазмы приведён в [4]. Серьёзной проблемой для моделирования равновесия плазмы может быть ограниченная функциональность кодов, связанная с зафиксированной в этих кодах параметризацией профиля тороидального тока в токамаке (т.е. нет возможности при расчётах заменить произвольные функции в правой части уравнения ГШ), что не позволит моделировать равновесие плазмы с немонотонным профилем плотности тока, а следовательно, такие коды не всегда удобны для конкретных расчётов.

Описанный в статье код TOREQ позволяет проводить расчёты с задаваемыми пользователем любой границей плазмы и любыми функциями в правой части уравнения ГШ.

**МОДЕЛЬ**

Равновесие плазмы в системе с осевой симметрией рассматривается в цилиндрической системе координат  $R, \varphi, Z$ . В токамаке  $R$  — радиальная координата, отсчитываемая от оси тора;  $Z$  — координата в вертикальном направлении,  $\varphi$  — тороидальный угол, зависимость от которого в токамаке как системе с осевой симметрией отсутствует.

Уравнение равновесия плазмы, связывающее распределение полоидального магнитного потока с плотностью тороидального тока плазмы, называется уравнением ГШ [1—3]:

$$\Delta^* \psi = R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dP(\psi)}{d\psi} - \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{dI^2(\psi)}{d\psi} = -\mu_0 R J_\phi. \quad (1)$$

В (1)  $\psi(R, Z)$  (полоидальный магнитный поток, делённый на  $2\pi$ , который можно рассматривать как метку магнитной поверхности),  $p(\psi)$  (газокинетическое давление плазмы) и  $I(\psi)$  (полоидальный ток внутри тороидальной магнитной поверхности с меткой  $\psi$ ) являются произвольными функциями  $\psi$ ,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $J_\phi = J_p$  — плотность тороидального (плазменного) тока.

В настоящее время уравнение ГШ часто используется в так называемом «каноническом» виде [5, 6].

Безразмерное «каноническое» уравнение ГШ в декартовых координатах описывается выражением

$$\Delta^* \psi^* = -\lambda \left( h^2 \beta_0 \frac{dp_n}{d\psi^*} + (1 - \beta_0) \frac{dI_n^2}{d\psi^*} \right) = -h \tilde{j}(h, \beta_0, \psi^*); \quad (2)$$

$$\Delta^* \psi^* = h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Здесь безразмерная функция  $\psi^*$  — функция потока полоидального магнитного поля, нормированная на произвольное значение  $\psi_n$ ;  $p_n$  и  $I_n$  — безразмерные значения давления и полоидального тока соответственно;  $h = 1 + x/A$ ,  $A = R_0/a$  — аспектное отношение;  $R_0$  и  $a$  — большой и малый радиусы токамака. В уравнениях (2) и (3) используются безразмерные координаты  $x = (R - R_0)/a$  и  $y = Z/a$ . При вычислениях безразмерный магнитный поток часто используется в виде  $\psi^* = (\psi - \psi_b)/(\psi_c - \psi_b)$  [7], где  $\psi_c$  и  $\psi_b$  — величина магнитного потока на магнитной оси и на границе плазмы соответственно.

Такой вид  $\psi^*$  обеспечивает изменение  $\psi^*$  в пределах от 0 до 1. В данной работе такую нормировку мы использовать не будем и в дальнейшем, для простоты, вместо  $\psi^*$  будем применять переменную  $\psi$ .

В «каноническом» виде уравнения ГШ профиль тороидального тока плазмы параметризуется так, чтобы с помощью наименьшего числа параметров (например, полный ток плазмы  $I_p$ , бета полоидальное  $\beta_p$ , безразмерная внутренняя индуктивность плазмы  $l_i$ ) наилучшим образом описывать эксперименты. В (2) параметр  $\lambda_l$  определяет величину безразмерной внутренней индуктивности  $l_i$ .

«Каноническое» уравнение ГШ характерно тем, что в нём выделен параметр  $\beta_0$ , который связан с  $\beta_p$  — отношением газокинетического давления плазмы к давлению полоидального магнитного поля. В многих работах, в которых для вычислений используется «каноническое» уравнение ГШ, считается, что  $\beta_0 = \beta_p$ . Расчёты, выполненные в [8], показали, что для  $0 \leq \beta_p \leq 1,5$   $\beta_0 = 0,99 \beta_p$  и для  $0 \leq \beta_p \leq 3,4$   $\beta_0 = 0,89 \beta_p$ . При дальнейшем увеличении  $\beta_p$  линейная зависимость между этими величинами нарушается.

Уравнение (2) решается внутри области, ограниченной границей плазмы, при условиях на магнитной оси  $\nabla \psi = 0$  и на границе  $\psi = 0$ .

Запишем плотность тока в виде [4, 5]

$$\tilde{j} = \lambda_l \left[ h^2 \beta_p A(\psi) + (1 - \beta_p) B(\psi) \right]. \quad (4)$$

Здесь  $A(\psi) = dp_n/d\psi$ ,  $B(\psi) = dI_p^2/d\psi$ .

Функции  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$  пользователь может выбрать по своему усмотрению. Необходимо отметить, что для некоторых функций  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$  уравнение ГШ имеет бифуркационные решения. Для выбора нужного решения в этом случае большое значение имеет выбор начального значения  $\psi_{st}$  [9] (см. раздел Описание кода).

В настоящей работе эти произвольные функции были выбраны в виде:

— для  $L$ -режима

$$A(\psi) = e^\psi - 1; \quad (5)$$

$$B(\psi) = e^{0,8\psi} - 1; \quad (6)$$

— для  $H$ -режима (режим с барьерами) или для сложного радиального распределения продольного тока [9]

$$A(\psi) = e^\psi + HV; \quad (7)$$

$$B(\psi) = e^{0,8\psi}, \quad (8)$$

где для режима с барьером функция  $HV$  имеет вид

$$HV = \Omega k(1 - \tanh(Ub))^2. \quad (9)$$

Здесь  $\Omega$  — параметр, определяющий амплитуду;  $k$  — крутизна барьера;  $Ub = k(\psi - \psi_0)$ ,  $\psi_0$  определяет положение барьера. Чем меньше  $\psi_0$ , тем ближе барьер к границе плазмы. Добавляя в (7) слагаемые типа (8), можно описывать плазму с двумя барьерами или плазму со сложным радиальным распределением продольного тока [9].

Описываемый код применим для расчётов равновесия плазмы с фиксированной границей.

Форма граничной поверхности задаётся пользователем. В этой работе рассматриваются два типа границы:

— D-образная граница без точки X

$$y^\pm = \pm K^\pm \left( \frac{1 - (d^\pm)^2}{1 + d^\pm x} \right)^{\gamma_1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + d^\pm x}}, \quad (10)$$

где  $K$  — вытянутость;  $d$  — треугольность границы. Знак плюс относится к верхней, знак минус — к нижней половине тора. Параметр  $\gamma_1$  служит для корректировки формы границы. В большинстве случаев он равен 0,2. Формула (10) справедлива для  $0,8 \leq d \leq 0,8$ . Для больших значений  $d$  может потребоваться корректировка при помощи изменения параметра  $\gamma_1$ . Следует отметить, что вычисленные по формуле (10) величины  $|y^\pm|$  немного больше, а  $|d^\pm|$  немного меньше заданных значений. Эта разница не превышает 10%;

— граница с точкой X в нижней половине тора.

Координаты точки X:  $x_x = -d$ ,  $y_x = K^-$ . Граница в верхней половине тора описывается формулой (10).

В нижней половине тора граница со стороны сильного поля имеет вид

$$y = -K^- \left| \frac{-1 - x}{-1 + d^-} \right|^{\gamma_2}, \quad x \leq x_x; \quad (11)$$

со стороны слабого поля

$$y = -K^- \left| \frac{1 - x}{1 + d^-} \right|^{\gamma_3}, \quad x \geq x_x. \quad (12)$$

В большинстве рассмотренных случаев  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0,57$ . Для корректировки формы кривых величины этих параметров можно изменять.

Описываемый код допускает применение других, по выбору пользователя, видов границы плазмы.

Величина безразмерной внутренней индуктивности  $l_i$  вычисляется по формуле

$$l_i = \frac{\langle B_p^2 \rangle}{\bar{B}_p^2}, \quad (13)$$

где  $\langle \rangle$  обозначают усреднение квадрата полоидального магнитного поля  $B_p$  по объёму плазмы,  $\bar{B}_p$  — по её границе.

Для нахождения коэффициента запаса  $q$  устойчивости используется выражение

$$q = \frac{d\Phi}{d\psi}, \quad (14)$$

где  $\Phi$  — поток тороидального магнитного поля.

Перевод безразмерных величин в размерные производится при помощи следующих соотношений:

— плотность продольного тока на магнитной оси

$$j_{ax} = I_p / (a^2 \int_S (j / j_{\max}) dS) \text{ MA/m}^2, \quad (15)$$

где  $I_p$  — величина продольного тока плазмы в МА;  $j_{\max}$  — максимальная величина безразмерной плотности продольного тока  $\tilde{j}_\varphi$ ;  $a$  — в м;  $S$  — безразмерная площадь полоидального сечения плазмы. Точность определения  $j_{ax}$  определяется точностью описания границы плазмы;

— давление плазмы на магнитной оси

$$p_{ax} = 50\beta_p I_p^2 / (a^2 \int_S (P / P_{\max}) dS) \text{ кПа}, \quad (16)$$

где  $P$  — безразмерное;  $P_{\max}$  — максимальное значение безразмерного давления плазмы.

Для определения размерной величины давления плазмы на магнитной оси (16) было использовано соотношение [10]

$$\beta_p^u = \frac{4V \langle p \rangle \mu}{\mu_0 I^2 R} = \frac{0,02a^2 \int pdS}{I_p^2}. \quad (17)$$

Здесь  $V$  — объём плазмы;  $\langle \rangle$  — интегрирование по объёму плазмы;  $p$  — в кПа.

В литературе часто используется выражение для полоидального бэга в виде [11]

$$\beta_p = 2\mu_0 \frac{\int pdS}{\bar{B}_p^2 S}, \quad (18)$$

где

$$\bar{B}_p = \frac{\mu_0 I}{L}, \quad (19)$$

здесь  $L$  — длина границы плазмы.

Отношение величин полоидальных бэга, определяемых формулами (17) и (18), равно

$$\xi = \frac{\beta_p^u}{\beta_p} = \frac{4\pi S}{L^2}. \quad (20)$$

Из формулы (20) видно, что для плазмы круглого сечения  $\xi = 1$ .

Расчёты показывают, что при увеличении вытянутости и треугольности плазмы различие величин, определяемых формулами (17) и (18), может достигать десятков процентов.

Точность определения  $p_{ax}$  зависит от того, какая функция — (17) или (18) используется для определения  $p_{ax}$ . Из сказанного следует, что ошибка в определении  $p_{ax}$  может достигать нескольких десятков процентов.

Для вычислений коэффициента запаса устойчивости  $q$  в работе используются следующие соотношения:

— величина коэффициента запаса устойчивости плазмы на магнитной оси

$$q_{ax} = 0,796B_0(1 + K_{\text{eff}}^2 / (R_0 j_{ax}(1 + h_{ax})^2 K_{\text{eff}})), \quad (21)$$

здесь  $B_0$ , Тл — величина магнитного поля на геометрической оси установки;  $j_{ax}$ , МА/м<sup>2</sup> — плотность продольного тока на магнитной оси установки;  $K_{\text{eff}} = S/\pi$  — эффективная вытянутость;  $h_{ax} = 1 + x_{ax}/A$ ;  $x_{ax}$  — координата магнитной оси. Эта формула является модернизацией формулы работы [12];

— величина коэффициента запаса устойчивости плазмы на магнитной поверхности, соответствующей координате  $x = 0,95$ :

$$q_{95} = \frac{5a^2 B_0}{IR_0 h_{ax}^2} \left[ \frac{1 + K_{\text{eff}}^2 (1 + 2d_{\text{eff}}^2 - 1,2d_{\text{eff}}^3)}{2} \frac{1,17 - 0,65\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right], \quad (22)$$

где  $\varepsilon = l/A$ ;  $d_{\text{eff}} = 0,5(d^+ + d^-)$ ;  $B_0$  — величина магнитного поля на геометрической оси плазмы. Эта формула является модифицированной формулой  $q_{95}$  из работы [10].

При использовании численных кодов для определения коэффициента запаса устойчивости возникает проблема вычислений этой величины около магнитной оси. Эта проблема возникает из-за того, что производные в формуле (14) в этой области близки к нулю и возникает неопределённость типа 0/0. Преодолеть эту неопределённость в большинстве случаев не удаётся, и поэтому около магнитной оси значение  $q$  аппроксимируется прямой (на рис. 11 она проведена пунктирной линией).

В описываемом коде абсолютное значение магнитного потока не вычисляется, поэтому вычисляемая величина  $q$  отличается от истинной. Чтобы учесть это отличие, мы нормируем расчётные данные на  $q_{95}$ .

Следует отметить, что не все численные коды решения уравнения ГШ при одинаковых исходных данных дают одинаковые результаты. Более того, один и тот же код может иметь несколько решений. Так что нахождение наиболее правильного решения представляет сложную и важную задачу [9, 13—16].

## ОПИСАНИЕ КОДА

При вычислениях описанной модели применяется код TOREQ (Toroidal Equilibrium), использующий программу решения дифференциальных уравнений FlexPDE (версия 8, Lite mode; <https://www.pdesolutions.com/flexpde/>).

FlexPDE использует итерационный процесс Ньютона—Рафсона для решения нелинейных систем. Этот метод может быть очень чувствителен к начальной оценке решения  $\psi_{st}$ . Если начальные условия слишком далеки от фактического решения, может оказаться невозможным найти ответ, даже если это может быть довольно просто для другого начального значения. В программе FlexPDE предусмотрен выбор начального значения.

Для решения строится сетка треугольных элементов в двумерной области, задаваемой границей плазмы (10), (11), (12). В бесплатной версии программы максимальное количество узлов сетки равно 406. В платной (профессиональной) версии это количество составляет  $10^7$ .

Перед началом расчётов пользователь заполняет «Входной файл», в который вносит необходимые сведения, т.е. пишет некоторую программу. Эта программа записывается на внутреннем языке FlexPDE, который слабо отличается от языка Fortran.

В качестве исходных данных «Входной файл» должен содержать следующие величины:  $R_0$ ,  $a$  — большой и малый радиусы токамака;  $K^\pm$ ,  $d^\pm$  — вытянутость и треугольность в верхней и нижней половинах тора, эти величины или задаются пользователем, или, если производится сравнение результатов расчётов с литературными данными, эти параметры определяются при аппроксимации границы из этих литературных данных;  $B_0$  — величина тороидального магнитного поля;  $I_p$  — ток плазмы;  $\beta_p$  — полоидальное бэта. В случае необходимости добавляются данные для описания барьеров или более сложных распределений плотности тока. На следующем этапе выбираются функции  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$ .

Для дальнейших расчётов нужно знать или задать безразмерную величину внутренней индуктивности плазмы  $l_i$ .

Так как решается безразмерное уравнение ГШ, то для получения нужного решения достаточно варьировать только параметр  $\lambda_i$ . Если уравнение имеет бифуркационные решения, то эти решения могут быть найдены при изменении начального значения  $\psi_{st}$  [9].

Эта операция продолжается до тех пор, пока величина  $l_i$ , определённая по формуле (13), не совпадёт с заданной величиной.

На рис. 1 показано окно программы FlexPDE на экране компьютера, приведены распределения поверхностей магнитного потока (PSI), давления ( $P$ ) и плотности продольного тока плазмы ( $j$ ), радиальных

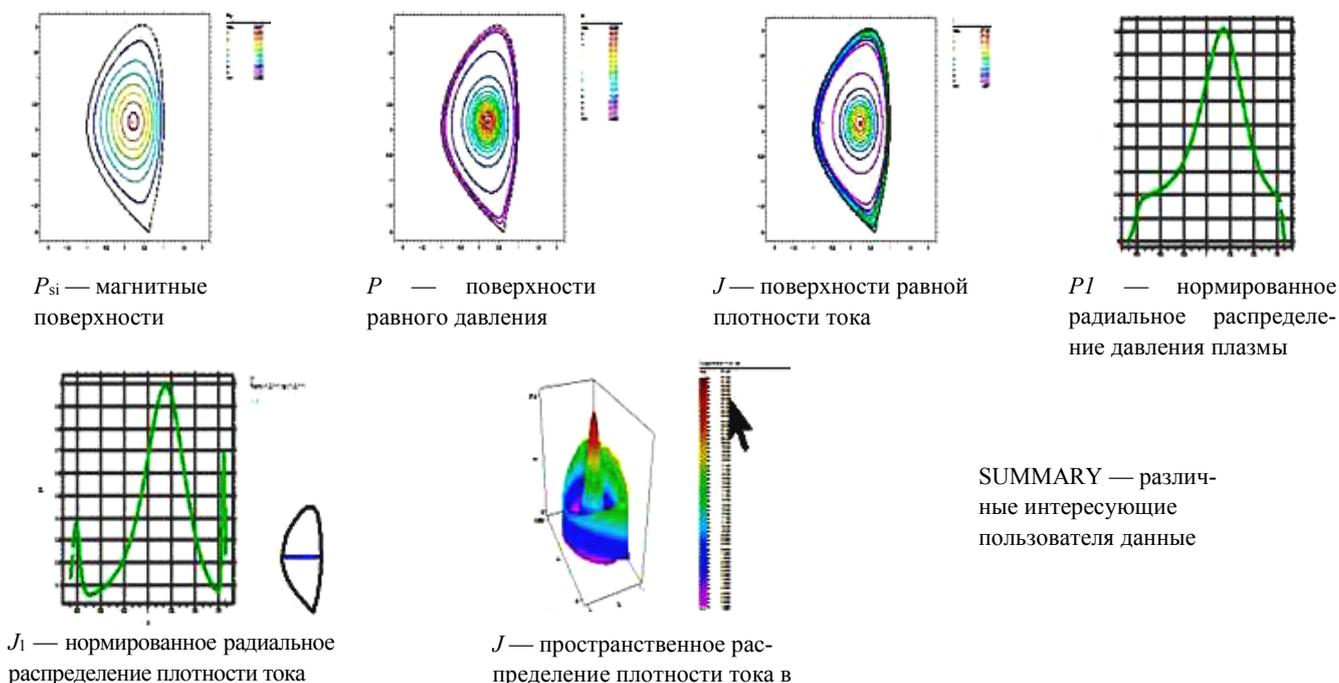


Рис. 1. Вид экрана компьютера с расчётными данными

распределений нормированных величин давления и плотности тока ( $p_1, j_1$ ). Приведено также пространственное распределение плотности тока в полоидальной плоскости. В разделе SUMMARY размещены различные данные, представляющие интерес для пользователя.

Каждая из приведённых на рис. 1 картинок может быть представлена в отдельном окне.

Коэффициент запаса устойчивости вычисляется более сложным способом. Непосредственно программа FlexPDE величину  $d\Phi/d\psi$  рассчитать не может. В связи с этим нужно, задавая величину  $\psi(x)$ , определить зависимость магнитного потока  $\Phi$  от  $\psi$  и после этого найти коэффициент запаса устойчивости.

## ПРОВЕРКА КОДА

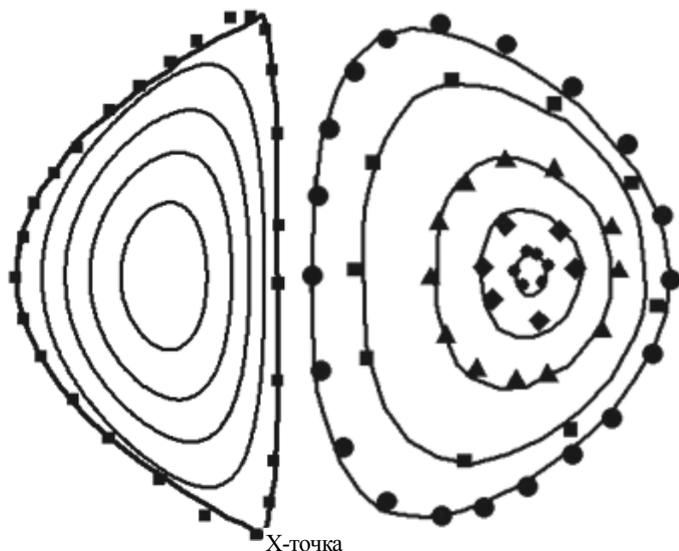


Рис. 2. Граница плазмы с большой ( $d^{\pm} = -0,92$ ) отрицательной треугольностью и X-точкой

Рис. 3. Магнитные поверхности в сферическом токамаке,  $A = 1,43, \beta_p = 0,4$

Сравнение результатов расчёта равновесия плазмы для различных токамаков с опубликованными данными показано на рис. 2—14. На этих рисунках сплошными линиями обозначены данные, взятые из различных источников, а символами — данные, рассчитанные при помощи кода TOREQ.

На рис. 2 показана граница плазмы с большой ( $d^{\pm} = -0,92$ ) отрицательной треугольностью [17]. Здесь  $\gamma_1 = 0,1$ . Магнитные поверхности соответствуют  $\beta_p = 0,7, l_i = 0,79$ .

На рис. 3 показаны магнитные поверхности в сферическом токамаке,  $A = 1,43, \beta_p = 0,4, I_p = 1$  МА [18]. Магнитные поверхности в [18] найдены по аналитическому решению уравнения ГШ.

На рис. 4 изображены магнитные поверхности в токамаке с D-образным сечением,  $\beta_p = 1, l_i = 0,6$  [11].

Распределение плотности тока и распределение давления в токамаке с D-образным сечением для  $A = 1,23, \beta_p = 2, l_i = 1,34$  [11] показаны на рис. 5, 6. На рис. 5 видно, что около внутренней границы плазмы тороидальный ток изменяет свой знак. Этот эффект соответствует выводам работ [19, 20], в которых показано, что знак тока изменяется при  $\beta_p > 0,5A$ .

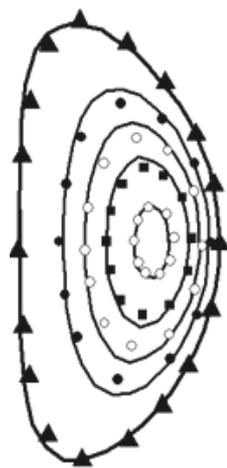


Рис. 4. Магнитные поверхности в токамаке с D-образным сечением,  $\beta_p = 1, l_i = 0,6$

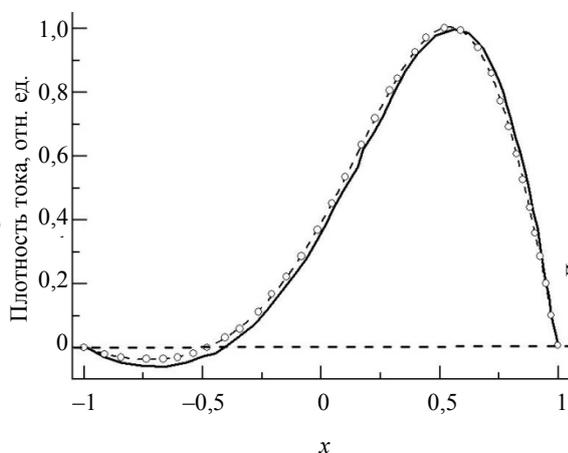


Рис. 5. Распределение плотности тока в токамаке с D-образным сечением для  $\beta_p = 2, l_i = 1,34, A = 1,23$

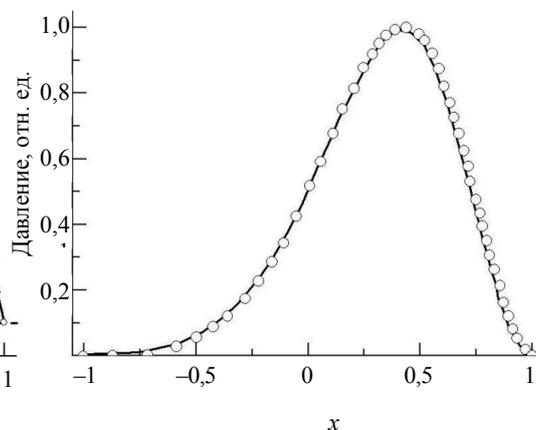


Рис. 6. Распределение давления плазмы в токамаке с D-образным сечением для  $\beta_p = 2, l_i = 1,34, A = 1,23$

На рис. 7, 8 показаны данные для установки с граничной поверхностью с X-точкой и  $A = 3,2$  (ASDEX-U) [11].

На рис. 7 показаны магнитные поверхности для плазмы с  $\beta_p = 1$  и  $l_i = 0,68$ , на рис. 8 — распределение плотности продольного тока, на рис. 9 — давления вдоль прямой, проходящей через магнитную ось установки, для плазмы с  $\beta_p = 2$  и  $l_i = 0,68$ .

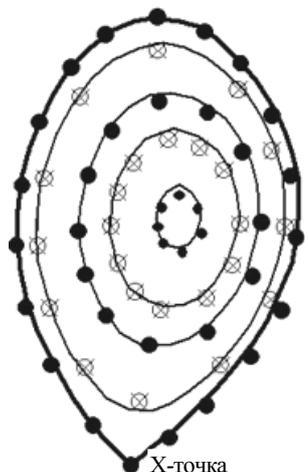


Рис. 7. Магнитные поверхности для плазмы с  $\beta_p = 1$ ,  $l_i = 0,68$ , с X-точкой

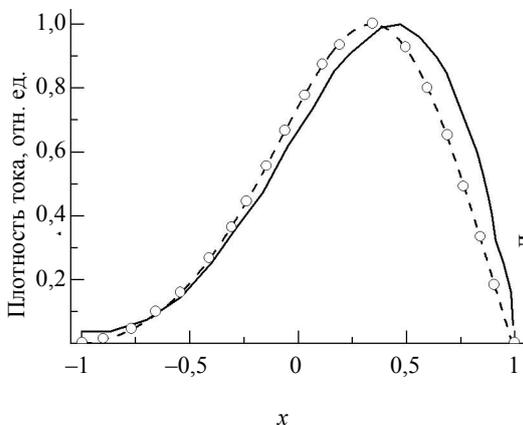


Рис. 8 Распределение плотности продольного тока вдоль прямой, проходящей через магнитную ось установки, для плазмы с  $\beta_p = 2$ ,  $l_i = 0,68$

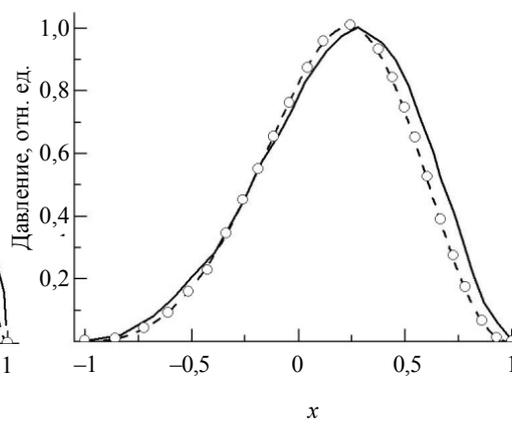


Рис. 9. Давление вдоль прямой, проходящей через магнитную ось установки, для плазмы с  $\beta_p = 2$ ,  $l_i = 0,68$

Следует отметить, что результаты расчётов при помощи описываемого кода на рис. 4—9 сравниваются с результатами расчётов, полученных на установке ASDEX аналитическими методами.

На рис. 10 показано распределение плотности продольного тока, на рис. 11 — коэффициента запаса устойчивости для плазмы с  $\beta_p = 0,83$  и  $l_i = 1,19$  на установке JET [21]. Контрольные данные на рис. 10, 11 получены при помощи расчётов с использованием кода IDENTC. В этой же работе приведены экспериментальные данные, которые хорошо описываются результатами расчётов.

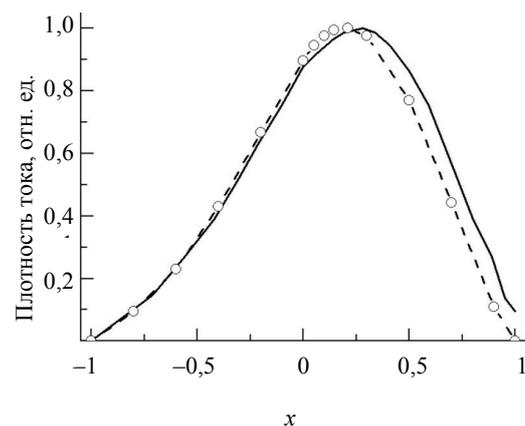


Рис. 10. Распределение плотности продольного тока для плазмы с  $\beta_p = 0,83$ ,  $l_i = 1,19$  на установке JET

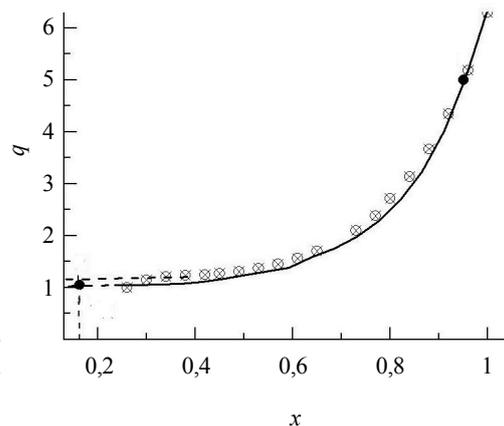


Рис. 11. Распределение коэффициента запаса устойчивости для плазмы с  $\beta_p = 0,83$ ,  $l_i = 1,19$  на установке JET



Рис. 12. Магнитные поверхности в старом варианте ИТЭР для плазмы с  $\beta_p = 0,73$ ,  $l_i = 0,92$

Магнитные поверхности в старом варианте ИТЭР [22] для плазмы со свободной границей можно увидеть на рис. 12. Точками отмечены результаты расчётов для плазмы с  $\beta_p = 0,73$  и  $l_i = 0,92$ .

Для иллюстрации возможностей кода TOREQ показаны некоторые равновесные параметры для плазмы с отрицательной треугольностью ( $d^\pm = -0,8$ ,  $K^\pm = 2$ ), барьером и границей с X-точкой. На рис. 13, 14 ось токамака расположена слева от геометрической оси тора. На рис. 13 видны магнитные поверхности, на рис. 14 — плотность продольного тока и давления плазмы. Обычно считается, что пики плотности тока около границ плазмы — это бутстреп-токи. На графике давления плазмы  $p$  видны внешние барьеры, которые соответствуют  $\Omega = 4$ ,  $k = 6$ ,  $\psi_0 = 0,2$ . Кроме того,  $\lambda = 0,8$ ,  $\psi_{st} = 1,8$ .

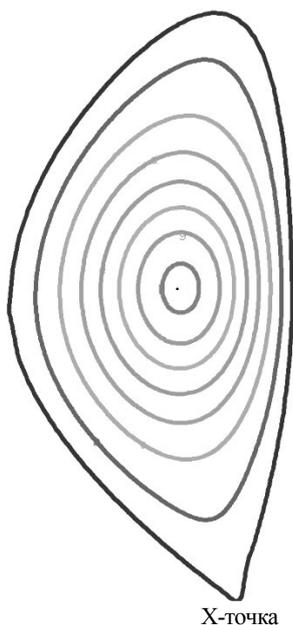


Рис. 13. Магнитные поверхности для плазмы с барьером, с отрицательной треугольностью ( $d^\pm = -0,8$ ,  $K^\pm = 2$ ) и границей с X-точкой

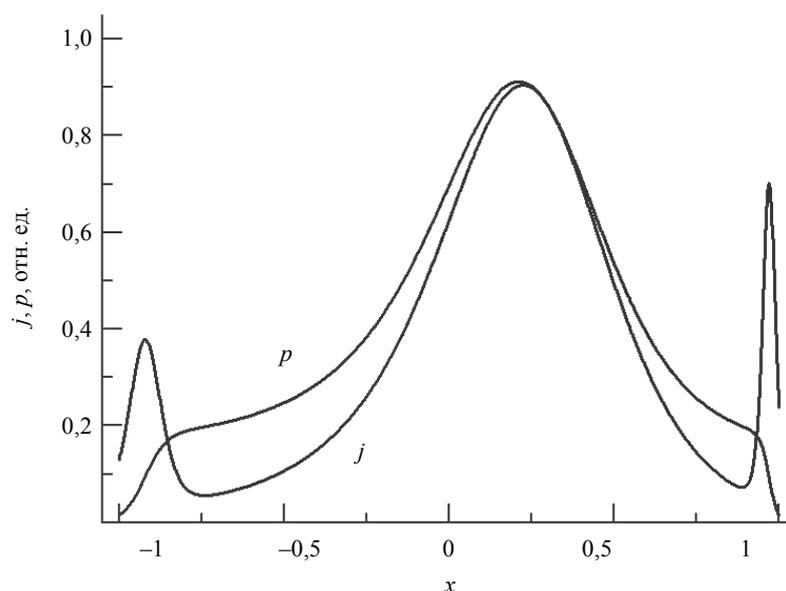


Рис. 14. Плотность продольного тока и давления плазмы с барьером, с отрицательной треугольностью ( $d^\pm = -0,8$ ,  $K^\pm = 2$ ) и границей с X-точкой

Выбор функций  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$  определяется таким образом, чтобы результаты моделирования наилучшим образом описывали экспериментальные данные. При этом, как видно на рис. 3—11, в некоторых случаях результаты расчётов с разными видами функций  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$  не сильно отличаются друг от друга.

В других случаях, например, для плазмы, в которой полный продольный ток  $I_p$  равен нулю [23], функции типа (5) и (6) не позволяют получить нужный результат. В [23] использовались функции  $A(\psi) = A_1$  и  $B(\psi) = A_2 + A_3\psi$ , где  $A_i = \text{const}$ .

## ВЫВОДЫ

Описан код TOREQ, позволяющий рассчитывать равновесие плазмы в токамаке с фиксированной границей произвольной формы. Сепаратриса в плазме также может быть использована в расчётах в качестве границы плазмы (граница с X-точкой). Код позволяет производить расчёты с произвольными функциями  $A(\psi)$  и  $B(\psi)$ , заданными пользователем.

Приводятся результаты сравнения опубликованных данных для равновесия плазмы с результатами расчётов при помощи описываемого кода для различных модельных и реальных установок.

Показано, что для всех рассмотренных случаев результаты расчётов при помощи TOREQ хорошо совпадают с опубликованными данными.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность рецензентам за полезные советы и замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. — ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 710.
2. Grad H., Rubin H. MHD equilibrium in an axisymmetric toroid. — In: Proc. of the 2nd U.N. Conf. on the Peaceful uses of Atomic Energy. IAEA, Vienna, 1958, vol. 31, p. 190.

3. **Nath D., Kalra M.S., Munshi P.** Computation of fixed boundary tokamak equilibria using a method based on approximate particular solutions. — *Computers and Mathematics with Applications*, 2015, vol. 70, p. 1220—1233; doi:10.1016/j.camwa.2015.07.013.
4. **Sevillano-Berasategui M.G., Garrido Barambones O.I., Garrido A.J.** Review of Tokamak Codes. — In: 5th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. CCE 2008.
5. **Luxon J.L., Brown B.B.** Magnetic analysis of non-circular cross-section tokamaks. — *Nucl. Fusion*, 1982, vol. 22, p. 813; doi: 10.1088/0029-5515/22/6/009.
6. **Jeon Y.M.** Development of a free boundary Tokamak Equilibrium Solver (TES) for Advanced Study of Tokamak Equilibria. — *J. of Korean Physical Society*, 2020, vol. 67, p. 843; doi: 10.3938/jkps.67.843.
7. **Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.** Равновесие плазмы с током в тороидальных системах. — *Вопросы теории плазмы*. Под ред. акад. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева, 1982, вып. 11, с. 118.
8. **Готт Ю.В., Лукаш В.Э.** Бета полоидальное в «каноническом» уравнении Грэда—Шафранова. — *Письма в ЖТФ*, 2024, т. 50, вып. 7, с. 20—23; doi: 10.61011/PJTF.2024.07.57464.19809.
9. **Gott Yu., Yurchenko E.** Effect of L—H and H—L Transitions on Tokamak-reactor Operation. — *American J. of Modern Physics*, 2020, vol. 9, № 1, p. 1—6; doi: 10.11648/j.ajmp.20200901.11.
10. **Uckan N.A., ITER Physics Group.** ITER Physics Design Guidelines. — *Fusion Technology*, 1991, vol. 19, 3P2B, p. 1493; doi: 10.13182/FST19-1493.
11. **Atanasiu C.V., Günter S., Lackner K., Miron I.G.** Analytical solutions to the Grad—Shafranov equation. — *Phys. Plasmas*, 2004, vol. 11, p. 3510—3517; doi: 10.1063/1.1756167.
12. **Menard J.E., Jardin S.C., Kaye S.M., Kessel C.E., Manickam J.** Real MHD stability limits of low aspect ratio tokamak plasmas. — *Nuclear Fusion*, 1997, vol. 37, p. 515; doi: 0.1088/0029-5515/37/5/I03.
13. **Зайцев Ф.С.** Построение существенно различных решений обратной задачи для уравнения равновесия тороидальной плазмы. — *Математическое моделирование*, 2009, т. 21, с. 58; doi: 10.1134/S2070048210030063.
14. **Miyamoto S., Isayama A., Bandyopadhyay I., Jardin S.C., Khayrutdinov R.R., Lukash V.E., Kusama Y., Sugihara M.** Inter-code comparison benchmark between DINA and TSC for ITER disruption modelling. — *Nucl. Fusion*, 2014, vol. 54, p. 083002; doi: 10.1088/0029-5515/54/8/083002.
15. **Wei X., Sun S., Tang W., Lin Z., Du H., Dong Ge.** Reconstruction of tokamak plasma safety factor profile using deep learning. — *Nucl. Fusion*, 2023, vol. 63, p. 086020; doi: 10.1088/1741-4326/acdf00.
16. **Ham C.J., Farrell P.E.** On multiple solutions of the Grad—Shafranov equation. — *Nucl. Fusion*, 2024, vol. 64, p. 034001; doi: 10.1088/1741-4326/ad1d77.
17. **Medvedev S.Yu., Ivanov A.A., Martynov A.A. et al.** Stability limits for tokamak plasma with negative triangularity. — In: 41st EPS Conference on Plasma Physics. Berlin, Germany, 2014, 27 June. P4.039.
18. **Zheng S.B., Wootton A.J., Solano E.R.** Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas. — *Phys. Plasmas*, 1996, vol. 3, p. 1176—1178; doi: 10.1063/1.871772.
19. **Callen J.D., Dory R.A.** Magnetohydrodynamic Equilibria in Sharply Curved Axisymmetric Devices. — *Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, p. 1523—1528; doi: 10.1063/1.1694118.
20. **Peng Y., Dory R.A., Nelson D.B., Sayer R.O.** Magnetohydrodynamic equilibria and local stability of axisymmetric tokamak plasmas. — *Physics of Fluids*, 1978, vol. 21, p. 467—475; doi: 10.1063/1.862246.
21. **Lazzaro E., Mantica P.** Experimental identification of tokamak equilibrium using magnetic and diamagnetic signals. — *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1988, vol. 30, p. 1735—1754; doi: 10.13182/FST96-A30749.
22. **Albanese R., Ambrosino G., Coccoresse E. et al.** Plasma Current, Shape, and Position Control in ITER. — *Fusion Technology*, 1996, vol. 30, p. 167—183; doi: 0.13182/FST96-A30749.
23. **Medvedev S.Yu., Hu Y., Martynov A.A., Villard L.** Tokamak plasma equilibria and axisymmetric stability with a zero total toroidal current. — In: 36th EPS Conference on Plasma Phys. Sofia, June 29 — July 3, 2009, ECA, vol. 33E, P-1.130.



Юрий Владимирович Готт,  
в.н.с., д.ф.-м.н., лауреат  
премий им. И.В. Курчатова,  
ветеран атомной энергетики  
и промышленности; НИЦ  
«Курчатовский институт»,  
123182 Москва, пл. Акаде-  
мика Курчатова 1, Россия  
Gott\_YV@nrcki.ru  
jvgott@gmail.com

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.

После доработки 16 июня 2024 г.

Принята к публикации 5 июля 2024 г.

Вопросы атомной науки и техники.

Сер. Термоядерный синтез, 2024, т. 47, вып. 3, с. 108—116.