

УДК 533.9.08, 533.932, 519.23

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ ТОКАМАКА ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ

А.Б. Кукушкин^{1, 2, 3}, А.А. Куличенко¹¹НИИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия³Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

Корреляционная рефлектометрия плазмы токамака является важным инструментом исследования флуктуаций плотности плазмы и их возможной связи с транспортными процессами в термоядерной плазме. В настоящей работе развит подход, основанный на применении концепции прогулок Леви к описанию нелокальных свойств флуктуаций плотности турбулентной среды. Перенос возмущений среды в режиме прогулок Леви (т.е. полётов Леви с учётом конечной скорости переносчиков возмущения) является супердиффузионным (нелокальным) механизмом переноса, требующим описания динамики по пространственным переменным с помощью интегральных уравнений, а не дифференциальных, как в случае диффузионных процессов. Такой подход позволяет восстановить нелокальные свойства флуктуаций плотности, проявляющиеся в их далёких пространственных корреляциях, по спектрам рассеяния электромагнитных (ЭМ) волн и корреляционной рефлектометрии. Получено универсальное описание связи наблюдаемой квазикогерентной компоненты в спектре рассеянных ЭМ-волн в плазме токамаков с процессом типа рассеяния Мандельштама—Бриллюэна. Эффективность предлагаемого метода показана на примере интерпретации данных радиальной и полоидальной корреляционной рефлектометрии ЭМ-волн радиочастотного диапазона для диагностики турбулентной плазмы в токамаке Т-10. Показано, что наблюдаемые флуктуации плотности могут иметь турбулентное происхождение, так как показатель спада в распределении Леви для вероятности длины свободного пробега флуктуаций плотности оказался близок к его аналогу в эмпирическом законе Ричардсона для гидродинамической турбулентности.

Ключевые слова: токамак, флуктуации плотности плазмы, корреляционная рефлектометрия, нелокальный (супердиффузионный) перенос.

A RECONSTRUCTION OF NONLOCAL CHARACTERISTICS OF DENSITY FLUCTUATIONS IN TOKAMAK PLASMA FROM CORRELATION REFLECTOMETRY

A.B. Kukushkin^{1, 2, 3}, A.A. Kulichenko¹¹NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia²National Nuclear Research University MEPhI, Moscow, Russia³Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

Correlation reflectometry of tokamak plasma is an important tool for studying plasma density fluctuations and their possible connection with transport processes in thermonuclear plasmas. In this paper, we develop an approach based on the application of the Levy walk concept to the description of nonlocal properties of fluctuations in the density of a turbulent medium. The transfer of medium perturbations in the Levy walk mode (i.e., Levy flights, taking into account the finite velocity of the perturbation carriers) is a superdiffusion (nonlocal) transfer mechanism that requires the description of the dynamics in spatial variables using integral equations, rather than differential ones, as in the case of diffusion processes. This approach makes it possible to reconstruct the nonlocal properties of density fluctuations, manifested in their distant spatial correlations, from the scattering spectra of electromagnetic (EM) waves and correlation reflectometry. A universal description is obtained of the relationship between the observed quasi-coherent component in the spectrum of scattered EM waves in tokamak plasmas and the Mandelstam—Brillouin scattering process. The effectiveness of the proposed method is shown by the example of interpreting the data of radial and poloidal correlation reflectometry of EM waves in the radio frequency range for diagnosing turbulent plasma in the T-10 tokamak. It is shown that the observed density fluctuations may be of turbulent origin, since the decay rate in the Levy distribution for the density fluctuation free path probability turned out to be close to its analog in the empirical Richardson law for hydrodynamic turbulence.

Key words: tokamak, plasma density fluctuations, correlation reflectometry, nonlocal (superdiffusion) transfer.

DOI: 10.21517/0202-3822-2022-45-2-105-122

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач диагностики и контроля магнитно-удерживаемой плазмы в устройствах для управляемого термоядерного синтеза является измерение пространственного распределения плотности плазмы и основных характеристик флуктуаций её плотности, так как последние играют важную роль

для удержания тепловой энергии плазмы и возможности поддержания термоядерного синтеза в высокотемпературной плазме. Наиболее эффективными диагностиками основных характеристик флуктуаций плотности плазмы являются активные диагностики, основанные на инжекции в плазму ЭМ-волн в диапазоне электронной циклотронной частоты и инжекции пучков тяжёлых ионов (Heavy Ion Beam Probing) и атомов водорода (Beam Emission Spectroscopy). Настоящая работа посвящена разработке и применению теории диагностики нелокальных свойств флуктуаций плотности плазмы с помощью диагностики первого типа — рефлектометрии плазмы ЭМ-волнами. Нелокальные свойства флуктуаций плотности плазмы представляют особый практический интерес в силу важности наблюдаемых нелокальных свойств переноса тепла в термоядерной плазме. Развитые методы анализа нелокальных свойств флуктуаций плотности плазмы были основаны на подходах, в которых флуктуации плазмы описывались в рамках моделей, основанных либо на априорных предположениях общего характера, либо на упрощённых подходах, не основанных на решении кинетических уравнений. Поэтому задача формализации моделей в рамках более общих и более строгих подходов остаётся актуальной.

В настоящей работе представлена теоретическая модель флуктуаций плотности в среде со стохастическими нелинейными процессами, что охватывает и случай турбулентной плазмы. Учёт нелинейности процессов заключён в предположении существования долгоживущих флуктуаций плотности плазмы (на качественном уровне это можно иллюстрировать возможным существованием уединённых волн: например, двумерных солитонов, описываемых широко известным уравнением Кадамцева—Петвиашвили). Кинетическая модель турбулентной среды позволяет описать динамику статистического ансамбля локализованных переносчиков возмущения плотности (локализованных флуктуаций плотности), которую можно рассматривать в линейном приближении с учётом таких процессов, как рождение переносчиков из тепловой энергии плазмы, обратный процесс их исчезновения, движение в плазме с конечной длиной свободного пробега, остановка переносчика без его исчезновения (захват) и возобновление движения. При этом феноменологически введённые параметры указанных процессов подлежат восстановлению путём сравнения с экспериментальными данными по тонким спектральным характеристикам рассеяния зондирующей ЭМ-волны в плазме.

Предложенная нами теоретическая модель использована для описания кросс-корреляционной рефлектометрии нелокальности в турбулентной плазме. Предложенная модель обобщает ранее развитые модели в том, что спектральные характеристики сигналов такой рефлектометрии получены путём решения кинетического уравнения для пространственно-временной динамики флуктуаций плотности плазмы и учитывают явления, ранее не охваченные существующими моделями. Прежде всего учтено свойство существенной дисперсии распределения переносчиков возмущения среды по длинам их свободного пробега, которое как раз и является генератором нелокальности (недиффузионности) переноса возмущений. Далее кратко поясним специфику нелокальности в процессах переноса и статус теории таких процессов.

Нормальная (обыкновенная) диффузия определяется как броуновское движение и описывается дифференциальным уравнением фоккер-планковского типа. Функция Грина такого уравнения, описывающая распространение возмущения от точечного мгновенного источника в однородной стационарной среде, является гауссианом с аргументом, определяющим закон распространения фронта $r_{fr} \sim (Dt)^\beta$, где $\beta = 1/2$, D — коэффициент диффузии. Однако этот закон нарушается для широкого класса физических процессов, где функция распределения по длине свободного пробега (ФРСП) для переносчиков возмущения среды оказывается медленно убывающей, а именно степенным образом, а не экспоненциально. Это приводит к расходимости коэффициента диффузии, формально определяемого в виде дисперсии ФРСП, а расчёт указанного закона распространения фронта по результатам анализа соответствующей функции Грина даёт $\beta > 1/2$. Такой тип переноса называется супердиффузионным или нелокальным.

Супердиффузионный перенос, а также связанная с ним концепция полётов Леви, введённая Мандельбротом [1, 2] (см. с. IX в монографии [2], а также обзоры [3—5]), охватывает множество явлений в физике и других дисциплинах. Модель нелокального переноса, получившая название «прогулки Леви с остановками» (см. [6—8] и обзор [9]), актуальна для таких задач, как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме [10—13], биологическая миграция [9, раздел 6], перенос энергии линейными волнами в плазме [14].

Аналитические методы хорошо развиты для задач стационарного нелокального переноса, таких, например, как теория переноса резонансного излучения при полном перераспределении по частоте в акте поглощения и излучения фотона атомом или ионом в газе или плазме [15—27]. Для более сложных задач, а именно нестационарного нелокального переноса, метод расчёта интересующих характеристик нелокального переноса (прежде всего приближенного описания функции Грина, характеризующей динамику фронта распространения возмущения среды от мгновенного точечного источника) развит в [28] в пределе бесконечной скорости света и обобщён на случай учёта запаздывания, т.е. конечной скорости света, в [29—33]. Указанный метод описания нестационарных процессов супердиффузии применён в этой работе для описания кинетики движущихся флуктуаций плотности в турбулентной среде. Это позволило сформулировать алгоритм восстановления нелокальных свойств стохастических процессов в среде по спектру флуктуаций её плотности, диагностируемому по спектрам рассеяния ЭМ-волн в среде.

В основе развитого подхода лежит использование концепции прогулок Леви (полётов Леви с учётом конечной скорости переносчиков). Такая концепция была предложена в [34] для стохастических нелинейных процессов, включая турбулентность гидродинамического движения непрерывных сред. Описание далёких пространственных корреляций было основано на линейном интегро-дифференциальном уравнении с медленно спадающим ядром, что соответствует супердиффузионному (нелокальному) переносу в режиме прогулок Леви. Полученные в [34] законы подобия позволили на качественном уровне установить связь с законом Ричардсона [35] для движения фронта возмущения в гидродинамической турбулентной среде и спектром Колмогорова [36] для однородной стационарной турбулентности. В настоящей работе сформулирован принципиально близкий подход, основанный на концепции прогулок Леви, правда, в рамках другой физико-математической модели.

В интересующей нас задаче корреляционной рефлектометрии турбулентной плазмы феномен нелокальности (супердиффузионности) процессов переноса тепла и частиц достаточно широко изучается применительно к этой и другим диагностикам плазмы [37]. Спектр применяемых моделей для описания флуктуаций плотности плазмы варьируется в широких пределах. Укажем это на примере интересующей нас доплеровской корреляционной рефлектометрии плазмы токамака. Парная корреляционная функция плотности плазмы может быть выбрана из общих статистических соображений в виде функции, не зависящей от времени, с гауссовской или степенной зависимостью от разности координаты: примером является [38, формула (20)], где при использовании общего подхода [39] рассчитан регистрируемый сигнал с учётом объёмного рассеяния зондирующей волны. Другой моделью является представление турбулентного поля флуктуаций плотности как конечного набора флуктуаций с заданными кинематическими параметрами индивидуальных возмущений — временем жизни, скоростью движения, длиной свободного пробега [40, с. 449]. Нашей целью является получение аналитического представления плотности флуктуаций турбулентной плазмы, в котором длина свободного пробега и скорость движения задаются распределением с дисперсией, а не только средним значением. При этом само аналитическое описание флуктуаций плотности является не априорно задаваемой функцией, а решением кинетического уравнения, учитывающего элементарные механические процессы в динамике индивидуальных возмущений плотности.

Конкретной практической целью настоящей работы является применение полученных теоретических результатов к интерпретации данных радиальной и полоидальной корреляционной рефлектометрии ЭМ-волн радиочастотного диапазона для диагностики турбулентной плазмы в токамаке T-10. Особый интерес представляет анализ явления, открытого на токамаке T-10 и получившего название «квазикогерентные колебания» [41—43] (в международной терминологии — Quasi-Coherent Mode). Впоследствии такие же результаты были получены на других токамаках с помощью такой же диагностики — рефлектометрии (токамаки TEXTOR, FTU, ToreSupra, JET, ASDEX-Upgrade, KSTAR, HL-2A, J-TEXT). Кроме этого, спектр с квазикогерентными компонентами наблюдается и с помощью другой диагностики — инжекции тяжёлоионного пучка [44] на том же токамаке T-10 (сравнение результатов этих диагностик проведено в [45]). Если наблюдаемые симметричные пики (относительно частоты диагностического излучения) в спектре рассеяния на флуктуациях плотности являются следствием наличия выделенной скорости их движения относительно плазмы, то имеем аналог тонкой структуры Мандельштама—Бриллюэна. Такая структура была теоретически предсказана для рассеяния света на звуковых волнах в упругих средах, включая жидко-

сти и газы (см. параграф «Рэлеевское рассеяние в газах и жидкостях» в [46]). Причиной появления тонкой структуры спектра рассеянного излучения (т.е. «расщепления» почти монохроматической линии, каковой является спектр при отсутствии звуковых волн) оказывается эффект Доплера.

В статье приведены основные уравнения рассеяния ЭМ-волн и кросс-корреляционной рефлектометрии в плазме; предложена физическая модель и соответствующая система уравнений для флуктуаций плотности, сводящаяся к интегральному уравнению для парной корреляционной (так называемой кросс-корреляционной) функции флуктуаций плотности плазмы, которое содержит функционал Холстейна [16], характерный для широкого круга процессов нелокального переноса, включая перенос резонансного излучения в плазме и газах в модели Бибермана—Холстейна [15—17]; рассчитан спектр рассеяния ЭМ-волн в турбулентной среде в локализованной области пространства и найдены основные кросс-корреляционные характеристики рассеяния ЭМ-волн различными точками среды; сформулирована и в частном случае решена обратная задача восстановления нелокальных параметров турбулентности; эффективность развитого подхода показана на примере интерпретации данных радиальной и полоидальной корреляционной рефлектометрии ЭМ-волн радиочастотного диапазона для диагностики турбулентной плазмы в токамаке Т-10.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭМ-ВОЛН И КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ В ПЛАЗМЕ

В случае рассеяния плоской монохроматической электромагнитной волны вектор электрического поля падающей волны имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega_i t - i\mathbf{k}_i \mathbf{r}), \quad (1)$$

где ω_i — частота падающей плоской волны (i от англ. «incident»); $\mathbf{k}_i$ — её волновой вектор. Электрическое поле, образованное рассеянием падающей волны на ансамбле свободных электронов, описывается выражением (8.12) в [47]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{r_0}{R} \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}, t) \exp(i(\omega_i t' - \mathbf{k}_i \mathbf{r})) [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]. \quad (2)$$

Здесь r_0 — классический радиус электрона; R — расстояние от заряда до точки наблюдения на большом расстоянии от электрона; $g(\mathbf{p}, t)$ — функция распределения электронов по пространственной координате $\mathbf{p}$ в момент времени t ; $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении распространения рассеянной волны; $\mathbf{E}_0$ — амплитуда электрического поля падающей волны; $t' = t - r/c + (\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r})/c$ (c — скорость света). Обозначим волновой вектор рассеянной волны с частотой ω_s (s от англ. «scattered») как $\mathbf{k}_s$, введём вектор и частоту рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i; \\ \omega &= \omega_s - \omega_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть электроны движутся по закону $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{0,j} + \mathbf{V}_j t$, что соответствует движению отдельной частицы, отмечаемой индексом j , по прямой траектории с начальной координатой $\mathbf{p}_{0,j}$ и скоростью $\mathbf{V}_j$. Тогда микроскопическая функция распределения, учитывающая флуктуации плотности в системе точечных частиц, имеет вид

$$g(\mathbf{p}, t) = \sum_j \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0,j} - \mathbf{V}_j t), \quad (4)$$

где суммирование по j означает суммирование по вкладам отдельных частиц.

Спектрально-угловое распределение мощности излучения, рассеянного ансамблем заряженных частиц с классическим радиусом r_0 из точки $\mathbf{r}$ в точку $\mathbf{r}_1$ в момент времени t (запаздыванием рассеиваемых диагностических ЭМ-волн пренебрегаем) согласно [47, формулы (8.15), (8.18)], имеет вид

$$\frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega_s} = \frac{cr_0^2}{4\pi} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T_0} |\hat{g}(\omega, \mathbf{K}, \mathbf{r}, t, T_0)|^2, \quad (5)$$

где фурье-образ означает соответствующее преобразование по быстрым переменным (т.е. на ограниченном интервале, практически достаточном для надёжного расчёта фурье-образа); $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении распространения из точки $\mathbf{r}$ в точку $\mathbf{r}_1$; $\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ — соответствующий $\hat{\mathbf{n}}$ телесный угол. Добавление координаты $\mathbf{r}$ в аргумент функции означает привязку всех параметров к «медленной» пространственной переменной, а интегралы по времени при расчёте фурье-образа плотности должны браться на ограниченном временном интервале $[0, T_0]$ вблизи момента («медленного») времени t .

Будем использовать стандартную дефиницию кросс-корреляционной функции рассеянного поля $C(\tilde{\tau})$ как свёртку (по быстрому времени) сигналов рассеяния из двух точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в координатном пространстве:

$$C(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{K}_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t + \tilde{\tau}, \mathbf{K}_2)}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{K}_1)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t, \mathbf{K}_2)|^2 \right]^{1/2}}. \quad (6)$$

Фурье-преобразование функции (6) по времени задержки $\tilde{\tau}$ даёт спектральное распределение, которое является конечным результатом обработки экспериментальных данных корреляционной рефлектометрии:

$$C(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{K}_1) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2, \omega, \mathbf{K}_2)}{\sqrt{\lim_{T_{01} \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_{01}} |\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{K}_1)|^2 \right) \lim_{T_{02} \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_{02}} |\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2, \omega, \mathbf{K}_2)|^2 \right)}}, \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{K}_1)$ — фурье-образ по времени от электрического поля рассеянной ЭМ-волны, а операция усреднения по времени T_0 необходима для нахождения спектрального состава мощности (а не всей энергии) рассеянного излучения. При этом в (7) предполагается статистическое усреднение по параметрам рассеивателей, что соответствует усреднению по всем микроскопическим параметрам электронов в функции распределения (4).

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЫ

Для описания нелокальности переноса возмущений плотности в турбулентной среде будем использовать гипотезу [34] о возможности представления динамики локализованных возмущений среды с помощью линейного интегро-дифференциального уравнения с интегралом по пространственным переменным. Ядро такого интеграла является медленно спадающей функцией координат, а соответствующая ему вероятность свободного пробега переносчиков возмущения среды принадлежит к классу распределений Леви. Такой подход предполагает, что сильные нелинейные взаимодействия образуют ансамбль устойчивых долгоживущих возмущений среды (например, волновых пакетов со свойствами солитонов), которые взаимодействуют со средой (рождаются и поглощаются в ней) в режиме баланса, описываемого линейными кинетическими уравнениями. Хотя предлагаемый нами формализм существенно отличается от формализма [34], в концептуальном аспекте мы фактически следуем гипотезе [34].

Мы предлагаем такую реализацию подхода [34], в которой стохастические свойства среды с сильной нелокальностью переноса возмущений её плотности описываются формализмом типа нелокального переноса фотонов в среде в модели Бибермана—Холстейна [15, 16]. Данная модель широко известна как перенос резонансного излучения в приближении полного перераспределения по частоте (ППЧ) фотона в элементарном акте поглощения фотона атомами или ионами и последующего его испускания возбуждённым атомом или ионом (см. монографии [17, 23] и обзоры [20, 21, 27]). Отметим, что свойство забывания спектрально-угловых параметров фотона при его переизлучении возбуждённым атомом в пределах той же спектральной линии вполне приемлемо при использовании такого подхода к описанию стохастических процессов в турбулентной среде. Для описания процессов переноса возмущений плотности

в интересующих нас задачах рефлектометрии необходимо перейти от предельного случая бесконечной скорости переносчиков, примененного к движению фотонов в лабораторной плазме и использованного в стандартной модели Бибермана—Холстейна, к случаю конечной скорости переносчиков. В терминах нелокальных, т.е. супердиффузионных, свойств переноса это означает переход от «полётов Леви» [1—5] к «прогулкам Леви» [6—9]. Учёт конечной скорости света характерен для задач переноса излучения в астрофизических объектах [10—13], но задачи нестационарного нелокального переноса были рассмотрены только для бесконечной скорости света, а конечность скорости света учтена в задачах переноса монохроматического излучения, который не является супердиффузионным. Задачи нестационарного нелокального переноса для конечной фиксированной скорости переносчиков были недавно решены в [29—33], включая прослеживание в [31] перехода между режимами переноса с доминированием полётов или прогулок Леви, т.е. между режимами, когда соответственно можно или нельзя пренебречь эффектами запаздывания вследствие конечности скорости движения переносчиков.

Применение концепции прогулок Леви к переносу возмущений плотности в квазиоднородной квазистационарной среде означает, что предлагаемая модель предполагает следующую микроскопическую динамику. Рождаемые вследствие сильных нелинейных процессов локализованные возмущения плотности могут либо оставаться захваченными средой и почти не двигаться относительно среды (будем называть их стоящими возбуждениями среды), либо (как локализованные нелинейные волны типа солитон) двигаться с постоянной скоростью до акта поглощения средой движущегося (бегущего) в ней возбуждения. Под поглощением будем понимать захват (остановку) бегущего возбуждения, т.е. его превращения в стоящее возбуждение среды с конечным временем жизни, по истечении которого стоящее возбуждение среды превращается в бегущее возмущение. Процесс рождения стоящих возбуждений является элементарным механическим процессом в том смысле, что существует и обратный процесс уничтожения («тушения», quenching), когда энергия локализованного возмущения среды возвращается среде в целом, т.е. делокализуется теми или иными неупругими процессами. Закон движения бегущих возмущений определяется дисперсионными свойствами нелинейных волн в среде и предполагает наличие некоторого распределения по скоростям. Флуктуации плотности плазмы, интересующие нас в задаче рефлектометрии, можно рассматривать как локализованные возмущения квазиоднородной квазистационарной среды и применить к ним формализм модели Бибермана—Холстейна с учётом конечной скорости переносчиков возмущения. При этом стохастические свойства процессов рождения и уничтожения («тушения»), свободного пробега в среде и остановки («поглощения» бегущей флуктуации) элементарного возбуждения среды мы будем характеризовать феноменологически вводимыми спектральными вероятностями. Основные параметры этих распределений вероятности подлежат восстановлению путём решения обратной задачи при интерпретации результатов измерений спектров рассеяния диагностического излучения и его корреляционной рефлектометрии.

Рассмотрим систему уравнений нелокального переноса для интенсивности $I_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ (т.е. спектрально-углового распределения плотности потока энергии) бегущих флуктуаций («переносчиков») и плотности стоящих флуктуаций $f(\mathbf{r}, t)$ в размерных переменных для одного сорта переносчиков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right)f(\mathbf{r}, t) + \int d\tilde{\omega} \frac{\kappa_{\tilde{\omega}}}{\hbar\tilde{\omega}} \int d\Omega(\mathbf{n}) I_{\tilde{\omega}}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) + q(\mathbf{r}, t); \\ \frac{1}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial I_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)}{\partial t} + (\mathbf{n}, \nabla) I_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = & -\kappa_{\omega} I_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) + \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{P_{\omega}}{4\pi} f(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь τ — среднее время жизни стоящих флуктуаций; σ — среднее обратное время исчезновения стоящих флуктуаций («тушения» возбуждения среды); $\mathbf{V}$ — скорость движения бегущих флуктуаций плотности, которые являются элементарными «рассеивателями» диагностических волн подобно тому, как, например, заряженные частицы являются «рассеивателями» ЭМ-волн (в случае неколлективного рассеяния это называется томсоновским рассеянием для слабoreлятивистских частиц и комптоновским рассеянием для релятивистских частиц), $\mathbf{V} = \mathbf{n}|\mathbf{V}|$; P_{ω} — спектральное распределение вероятности испускания переносчиков с частотой $\tilde{\omega}$; κ_{ω} — коэффициент «поглощения» переносчиков с частотой $\tilde{\omega}$,

т.е. обратная длина свободного пробега таких переносчиков до остановки в среде; $q(\mathbf{r}, t)$ — источник стоящих флуктуаций (плотность мощности рождения таких флуктуаций в среде).

Для реализации супердиффузионного переноса функция распределения по длине свободного пробега (ФРСП) должна быть медленно спадающей функцией расстояния ρ , т.е. степенной. При описании нелокального (супердиффузионного) переноса удобно использовать такие функционалы (в трёхмерном случае) из раздела 1 в [20]:

$$W(\rho) = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{dT(\rho)}{d\rho} \equiv \frac{1}{4\pi\rho^2} W_{\text{step}}(\rho);$$

$$T(\rho) = \int d\tilde{\omega} P_{\tilde{\omega}} \exp[-\kappa_{\tilde{\omega}}\rho],$$
(9)

где $1/\kappa_0(\mathbf{V})$ является характерной длиной свободного пробега переносчиков (бегущих флуктуаций), движущихся с (постоянной) скоростью $\mathbf{V}$. При этом функция $W_{\text{step}}(\rho)$ есть ФРСП переносчиков возмущения среды. Интеграл в (9) берётся по всем частотам. Отметим также, что спектральные характеристики источника и стока для бегущих флуктуаций плотности зависят от скорости движения этих флуктуаций. В дальнейшем мы в явном виде будем указывать эту зависимость.

Важно отметить, что используемая здесь частота $\tilde{\omega}$ является такой характеристикой переносчиков возмущения, которая позволяет описать дисперсию их длин свободного пробега. Частота в (8) и (9) может быть интерпретирована как флуктуирующая энергия переносчиков (в модели Бибермана—Холстейна частота резонансного излучения однозначно связана с энергией соответствующих элементарных возмущений электродинамического вакуума — фотонов) и существенно влияет на длину свободного пробега. В дальнейшем мы сведём описание конечных результатов в терминах функции Холстейна и таким образом построим формализм, в котором зависимость от деталей спектральных характеристик элементарных актов испускания и поглощения переносчиков сосредоточена в зависимости функции Холстейна от пространственной координаты — длины свободного пробега, не меньшей заданного расстояния.

Для задачи рассеяния диагностических ЭМ-волн нас будет интересовать фурье-образ плотности флуктуаций по пространственной и временной переменным, поскольку электрическое поле рассеянной ЭМ-волны определяется фурье-образом плотности флуктуаций при значении частоты, равном $\omega = \omega_s - \omega_i$, и волновом векторе, равном $\mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ (где индекс «s» означает рассеянную волну, а «i» — падающую). Таким образом, указанная здесь частота ω имеет другой смысл, чем таковая в (8) и (9).

В системе уравнений (8) будем считать, что динамика переносчиков происходит в слабонеоднородной квазистационарной среде, под которой далее понимается среда с характерными пространственно-временными масштабами изменения параметров τ , σ , $\kappa_{\tilde{\omega}}$ и $P_{\tilde{\omega}}$, много большими соответствующих параметров функции распределения переносчиков. Тогда при решении системы кинетических уравнений с помощью преобразований Фурье и Лапласа по «быстрым» переменным указанные параметры среды можно считать постоянными («медленными» переменными). Далее приведём конечный результат решения системы уравнений (8). Общая методология получения решения совпадает с таковой в [29—32]. Более подробное описание вывода этого и других результатов будет опубликовано в общезначимом журнале.

Введём дефиницию плотности флуктуаций, бегущих со скоростью $\mathbf{V}$, которая является интегральной величиной по энергии индивидуальных переносчиков (частоте $\tilde{\omega}$ в (8)), и будем искать фурье-образ этой функции по пространственной координате:

$$g(\mathbf{K}, t, \mathbf{V}) = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int d\tilde{\omega} \frac{\widehat{I}_{\tilde{\omega}}(\mathbf{K}, \mathbf{V}, t)}{\hbar\tilde{\omega}},$$
(10)

где $\widehat{I}_{\tilde{\omega}}(\mathbf{K}, \mathbf{V}, t)$ — фурье-образ интенсивности по координате. В итоге в предположении постоянства скорости бегущей флуктуации при её движении между точками остановки фурье-образ по координате и лаплас-образ по времени для плотности флуктуаций j -й частицы m -го сорта принимает следующий вид (отметим, что параметры функции Холстейна зависят от «медленной» пространственной координаты):

$$\hat{g}_m(\mathbf{K}, \omega, \mathbf{V}_j) = \frac{1}{4\pi} Q_{\text{eff}}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega) \int_0^{+\infty} dt \exp(-i(\omega - (\mathbf{V}_j, \mathbf{K}))t) T_m(|\mathbf{V}_j|t, \mathbf{V}_j). \quad (11)$$

Таким образом, фурье-лаплас-образ плотности флуктуаций является произведением перенормированного (эффективного) источника стоящих флуктуаций

$$Q_{\text{eff}}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega) = \frac{Q_m(\mathbf{K}, i\omega)}{\sigma_m \tau_m}, \quad (12)$$

на фурье-образ функции Холстейна с учётом доплеровского сдвига частоты в акте рассеяния зондирующего излучения бегущей флуктуацией. Здесь $Q_m(\mathbf{K}, i\omega)$ — фурье-лаплас-образ для источника стоящих флуктуаций $q(\mathbf{r}, t)$ в (8). Указанное здесь выражение для эффективного источника является приближенным и верно при $\sigma\tau \gg \omega\tau \gg 1$ (термодинамический предел для плотности стоящих флуктуаций). Учёт более точного эффективного источника немного усложняет результат.

Как будет показано далее, в практических задачах нас будет интересовать такой случай, когда эффект поглощения переносчиков (бегущих флуктуаций плотности) будет мал по сравнению с эффектом доплеровского уширения спектров, обусловленного движением переносчиков. Это означает близость интеграла в (11) к дельта-функции Дирака, поскольку при формальном стремлении коэффициента поглощения к нулю функция Холстейна стремится к единице:

$$\lim_{\kappa_0 \rightarrow 0} \hat{g}_m(\mathbf{K}, \omega, \mathbf{V}_j) = \frac{1}{8} Q_{\text{eff}}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega) \delta(\omega - (\mathbf{V}_j, \mathbf{K})). \quad (13)$$

Данный предел свободного движения флуктуаций плотности важен для проверки совпадения спектра рассеяния с таковым в известной задаче неколлективного рассеяния ЭМ-излучения на свободных точечных заряженных частицах.

СПЕКТР РАССЕЯНИЯ

Для иллюстрации эффективности развиваемого подхода мы применим общие теоретические результаты к интерпретации экспериментов по радиальной и полоидальной доплеровской корреляционной рефлектометрии в токамаке Т-10. Далее конкретизируем параметры, определяемые геометрией эксперимента и ожидаемым распределением переносчиков возмущения плотности по скоростям.

При зондировании радиального профиля плотности тороидальной осесимметричной плазмы длина волны инжектируемого ЭМ-поля выбирается из условия отражения зондирующего излучения от области плотной замагниченной плазмы. При инъекции ЭМ-волн в электронно-циклотронном (ЭЦ) диапазоне частот часто используют ЭЦ-волны с так называемой обыкновенной поляризацией. При этом радиальной точкой отражения (точнее, магнитной поверхностью, на которой происходит отражение волны) является та точка, где частота инжектируемой волны совпадает с локальным значением плазменной частоты. Отметим, что, кроме отражения зондирующего ЭМ-излучения с сохранением его основной частоты, происходит и рассеяние излучения с относительно небольшим изменением частоты. Этот сдвиг определяется прежде всего доплеровским сдвигом из-за рассеяния волны на бегущих флуктуациях плотности (см. (12)), что, по сути, совпадает с эффектом образования структуры типа дублета Мандельштама—Бриллюэна [46] в рассеянии света на звуковых волнах в упругих средах. Кроме этого, возникает уширение спектра вследствие конечного времени жизни бегущей флуктуации плотности (т.е. уширение дельта-функции вследствие отличия функции Холстейна от единицы в (11)). С учётом относительной малости отклонения частоты рассеянного излучения от частоты зондирующей ЭМ-волны $\omega_s \approx \omega_i$ для вектора рассеяния имеем

$$K = 2n \frac{\omega_i}{c} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (14)$$

где n — коэффициент преломления среды; θ — угол между рассеянной волной и падающей.

Для реализации, практически интересующей нас радиальной рефлектометрии, следует инжектировать и принимать отражённый сигнал примерно перпендикулярно магнитным поверхностям, чтобы век-

тор рассеяния $\mathbf{K}$ в (3) был направлен строго по малому радиусу тороидального плазменного шнура (схема такого эксперимента показана в [40, рис. 1—3]).

Если в плазме имеется несколько сортов переносчиков с соответствующими распределениями по скоростям движения $h_m(\mathbf{V})$ и относительным количеством A_m , то спектр рассеяния содержит сумму по сортам частиц и усреднение по скоростям для каждого сорта:

$$\frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}d\omega_s} = \sum_m A_m \int d\mathbf{V} h_m(\mathbf{V}) \frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t, \mathbf{V})}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}d\omega_s}, \quad (15)$$

где спектр рассеяния на флуктуации, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, задаётся (5) и приводится к следующему виду:

$$\frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t, \mathbf{V})}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}d\omega_s} = \frac{c r_0^2}{\pi(4\pi)^3} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 |\mathcal{Q}_{\text{eff}}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{V})|^2 \left| \int_0^{+\infty} dt \exp(-i(\omega - (\mathbf{V}, \mathbf{K}))t) T_m(|\mathbf{V}|t, \mathbf{V}) \right|. \quad (16)$$

Результат (15), (16) отличается от известного выражения в [47, формула (8.35)] для спектра некогерентного рассеяния зондирующего излучения свободными заряженными частицами наличием функции Холстейна в подынтегральном выражении, что соответствует уширению спектральной линии рассеянного излучения вследствие конечного времени жизни рассеивателя. Детальное описание этого уширения в [48, формула (13)], а также усреднения по времени T_0 и соответствующего предельного перехода к бесконечному верхнему пределу в интеграле по времени можно найти в [48].

Нас будет интересовать случай двух типов переносчиков: бегущие флуктуации плотности, скорость которых определяет компоненты спектра рассеяния с существенным сдвигом относительной зондирующей частоты, и «почти стоящие» флуктуации плотности. При этом оба типа частиц, рассеивающих зондирующее излучение, обладают некоторым «тепловым» распределением по скоростям вблизи средней скорости данного сорта частиц.

Для бегущих флуктуаций будем использовать распределение по вектору скорости, имеющее гауссовский вид:

$$h(\mathbf{V}, \mathbf{V}_0, \alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha V_0} \right)^3 \exp \left(-\frac{(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_{\text{pl}})^2}{2(\alpha V_0)^2} \right), \quad (17)$$

где $\mathbf{V}_{\text{pl}}$ — средняя массовая (т.е. гидродинамическая) скорость плазмы в лабораторной системе координат (т.е. относительно измерительной аппаратуры); $\mathbf{V}_0$ — средняя скорость флуктуаций в системе покоя плазмы. Нас будет интересовать случай, когда вектор рассеяния направлен перпендикулярно скорости гидродинамического движения плазмы. Тогда можно использовать такое распределение по проекциям скорости параллельно вектору $\mathbf{K}$:

$$h(V_{\parallel}, \pm V_{0,\parallel}, \alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha V_{0,\parallel}} \right)^2 \exp \left(-\frac{(V_{\parallel} \pm V_{0,\parallel})^2}{2(\alpha V_{0,\parallel})^2} \right), \quad (18)$$

где $V_{\parallel} = (\mathbf{V}, \mathbf{K})/K$, а знаки плюс и минус соответствуют положительным и отрицательным значениям проекции скорости на направление вектора рассеяния (при небольшом значении параметра α можно считать, что в функции (18) дают вклад частицы со скоростью только одного знака).

Для почти стоящих флуктуаций средняя скорость $V_{0,\parallel} = 0$, а ширина распределения по скоростям задаётся средней тепловой скоростью, равной V_T :

$$h_c(V_{\parallel}, V_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_T} \exp \left(-\frac{V_{\parallel}^2}{2V_T^2} \right). \quad (19)$$

Распределение по длине свободного пробега таких флуктуаций будем считать диффузионным, т.е. $T(\rho) = \exp(-\kappa_0 \rho)$, что даёт

$$\int_0^{+\infty} dt \exp(-i(\omega - (\mathbf{V}, \mathbf{K}))t) T(|\mathbf{V}|t) = \frac{1}{\kappa_0 |\mathbf{V}| + i(\omega - (\mathbf{V}, \mathbf{K}))}. \quad (20)$$

При описанных предположениях суммарный спектр рассеяния будет иметь вид (здесь опущена часть аргументов, указанных в (1))

$$\begin{aligned} \frac{dW(\omega)}{d\Omega_{\hat{n}}d\omega_s} = & A_{\text{left}} \int dV_{\parallel} h(V_{\parallel}, -V_{0,\parallel}, \alpha) \frac{dW_{\text{left}}(\omega)}{d\Omega_{\hat{n}}d\omega_s} + \\ & + A_{\text{right}} \int dV_{\parallel} h(V_{\parallel}, V_{0,\parallel}, \alpha) \frac{dW_{\text{right}}(\omega)}{d\Omega_{\hat{n}}d\omega_s} + A_{\text{centr}} \int dV_{\parallel} h_c(V_{\parallel}, V_T) \frac{dW_{\text{centr}}(\omega)}{d\Omega_{\hat{n}}d\omega_s}, \end{aligned} \quad (21)$$

где левый и правый компоненты спектра соответствуют вкладу переносчиков с положительными и отрицательными значениями проекции скорости на направление вектора рассеяния, а модули скоростей движения вдоль и против направления вектора рассеяния считаются одинаковыми, что соответствует движению флуктуаций плотности одного и того же сорта.

КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ

В рассматриваемом нами случае неколлективного (некогерентного по общепринятой терминологии [47]) рассеяния эффектами интерференции вкладов флуктуаций разного сорта можно пренебречь. Нашим ключевым упрощением общих выражений является учёт только тех движений, которые соответствуют переходу одной и той же флуктуации плотности из одной исследуемой точки в другую путём свободного движения с постоянной скоростью. Это соответствует учёту частиц со скоростью

$$\mathbf{V}_j^{(1,2)} = \left| \mathbf{V}_j^{(1,2)} \right| \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (22)$$

Тогда время запаздывания регистрируемого сигнала определяется прямым пролётом рассеивающей флуктуации плотности между наблюдаемыми точками:

$$\Delta t_{1,2}^{(j)} = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}_j^{(1,2)} + \mathbf{V}_{\text{pl}}|}, \quad (23)$$

где учтено движение плазмы относительно детектора со скоростью $\mathbf{V}_{\text{pl}}$. Тогда конечный результат для спектра кросс-корреляционной функции при известном относительном количестве A_m переносчиков m -го сорта принимает вид

$$\begin{aligned} C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1) = & \frac{[\hat{\mathbf{n}}_1, [\hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{E}_0]] [\hat{\mathbf{n}}_2, [\hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{E}_0]]}{[\hat{\mathbf{n}}_1, [\hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{E}_0]] [\hat{\mathbf{n}}_2, [\hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{E}_0]]} \exp(i(\mathbf{K}_1, \mathbf{r}_1) - i(\mathbf{K}_2, \mathbf{r}_2)) \sum_m A_m \times \\ & \times \frac{\left[\sum_j T_m (|\mathbf{V}_j^{(1,2)}| \Delta t_{1,2}^{(j)}, |\mathbf{V}_j^{(1,2)}|) \exp[i(\omega - (\mathbf{K}_1, \mathbf{V}_j)) \Delta t_{1,2}^{(j)}] g_m(\mathbf{r}_2, \mathbf{K}_2, \omega, \mathbf{V}_j^{(1,2)}) \right]}{\left[\left[\sum_{m_1} \sum_{j_1} |g_{m_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{K}_1, \omega, \mathbf{V}_{j_1}^{(1,2)})| \right] \times \left[\sum_{m_2} \sum_{j_2} |g_{m_2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{K}_2, \omega, \mathbf{V}_{j_2}^{(1,2)})| \right] \right]^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что результат в явном виде зависит от функции Холстейна, описывающей нелокальность процесса переноса, поскольку её отклонение от экспоненциальной зависимости, в частности, степенной спад с ростом расстояния, приводит к медленному спаду с ростом расстояния, в частности, к отличию спада парных корреляций плотности от экспоненциального и от гауссовского.

Отметим, что здесь в аргументы функции Холстейна добавлена «медленная» пространственная переменная $\mathbf{r}_1$, поскольку от неё зависит характерная величина коэффициента поглощения k_0 в (9). В функции Холстейна учтена зависимость только от разности пространственных координат, а зависимостью от такой координаты, т.е. «медленной» переменной, в коэффициенте поглощения можно пренебречь.

Рассмотрим случай радиальной доплеровской корреляционной рефлектометрии, когда можно положить $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}$, а вектор рассеяния имеет только радиальный компонент K_r и зависимость от скорости гидродинамического вращения плазмы выпадает. Для одного сорта рассеивателей с распределением по скоростям $h(\mathbf{V})$ из (24) получим

$$C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1) = \exp(i(\mathbf{K}, \mathbf{r})) \frac{\langle T(|\mathbf{V}_r \Delta t_{1,2}|, |\mathbf{V}_r|) \exp[i(\omega - K_r V_r) \Delta t_{1,2}] |g(\mathbf{r}_2, K_r, \omega, V_r)| \rangle}{\{ |g(\mathbf{r}_1, K_r, \omega, V_r)| |g(\mathbf{r}_2, K_r, \omega, V_r)| \}^{1/2}}, \quad (25)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по скоростям вдоль направления вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ между точками наблюдения, т.е.

$$\langle \dots \rangle = \int dV_r h(V_r) (\dots), \quad (26)$$

где V_r является радиальной проекцией вектора (22). Отметим, что из (25) видно, что $C(\omega, 0) = T(0) = 1$.

Из (25) виден общий физический смысл парной корреляционной (кросс-корреляционной) функции: она есть результат усреднения (по спектральной плотности флуктуаций) произведения двух факторов — вероятности свободного прохождения бегущей флуктуацией (т.е. без «поглощения» бегущей флуктуации, означающего остановку этой флуктуации в среде) расстояния между двумя точками рассеяния зондирующего излучения (эта вероятность описывается функцией Холстейна) и фазового множителя, описывающего сдвиг фазы рассеянного излучения вследствие запаздывания при свободном пробеге (при этом учтён доплеровский сдвиг частоты рассеянного излучения).

Кросс-корреляционная функция (25) предполагает локализацию вклада флуктуаций плотности в рассеянное излучение при фиксированной частоте зондирующего излучения. Такое предположение лежит в самой основе метода радиальной корреляционной доплеровской рефлектометрии в токамаках: сканирование зондирующей волны по частоте соответствует сканированию пространственного профиля флуктуаций плотности по малому радиусу плазменного шнура. Однако детальные исследования задачи рассеяния волн на флуктуациях плотности показали возможную существенную роль нелокализованного, «объёмного» рассеяния [49]. Вопрос о значимости объёмного рассеяния остаётся открытым. Для его решения нужно учесть существенную нестационарность и подвижность флуктуаций плотности плазмы. В данной работе мы ограничимся рамками предположения о пространственной локализации и проверим возможность интерпретации измерений в токамаке Т-10 в стандартном подходе к проблеме локализации области рассеяния.

Кросс-корреляционная функция $C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1)$ (7), для которой нами получено аналитическое описание (24), (25), является комплексной величиной, зависящей от частоты и расстояния между парой точек. При обработке экспериментальных данных принято рассчитывать амплитуду (модуль когерентности $|C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1)|$) и фазу Φ кросс-корреляционной функции (7):

$$\Phi = \text{Im} \{ \ln [C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1)] \}. \quad (27)$$

В случае монохроматического распределения флуктуаций по скорости их движения при нулевой проекции гидродинамической скорости на вектор рассеяния или при доминировании гидродинамической скорости над скоростью флуктуаций производная кросс-фазы по частоте имеет простую зависимость от той или иной доминирующей скорости:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \cong \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|}. \quad (28)$$

Это выражение нередко используют для оценки скорости движения флуктуаций по наклону кривой, описывающей спектральную зависимость кросс-фазы. Отметим, что в случае немонотонного распределения бегущих флуктуаций по скоростям такая оценка может существенно отличаться от оценки средней скорости по нашим общим формулам, так как учёт этой немонотонности приводит к частичной компенсации осцилляций в (24), (25) и уменьшению фазы комплексной величины (см. следующий раздел).

Анализ кросс-корреляционной функции (24) показывает, что её отличие от экспоненциального спада с ростом расстояния (в частности, от гауссовского вида) имеет место вследствие медленного спада функции Холстейна. Это позволяет объяснить результаты обработки измерений электрических полей рассеянных ЭМ-волн в экспериментах по рефлектометрии плазмы в токамаках. Для объяснения полученных на токамаке Т-10 результатов для кросс-корреляционной функции [40, рис. 5, 6] необходимо вводить второе, дополнительное гауссовское распределение.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ПЕРЕНОСА ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ

Перейдём к постановке и решению обратной задачи восстановления основных характеристик бегущих и «почти стоящих» флуктуаций плотности по известному спектру рассеяния (5) и кросс-корреляционной функции (7), опираясь на полученные нами аналитические представления (15), (16) и (24). Предполагаем сильное «тушение» «почти стоящих» флуктуаций: $\sigma\tau \gg \omega\tau \gg 1$.

Искомыми параметрами являются следующие:

— вектор средней скорости движения бегущих флуктуаций $\mathbf{V}_0$, что включает его проекции на вектор рассеяния и на направление между точками наблюдения для кросс-корреляционного анализа (в рассматриваемом нами случае эти направления совпадают и являются таковыми по малому радиусу аксиально-симметричной тороидальной плазмы);

— ширина функции распределения бегущих переносчиков по скорости α , введённая в (17);

— коэффициент поглощения бегущих переносчиков κ_0 в функции Холстейна (9), который будем рассматривать в следующем виде, содержащем два искомых параметра $\kappa_{0,\text{res}}$ и β :

$$\kappa_0(\mathbf{V}) = \kappa_0(\mathbf{V}_0) \exp\left(\frac{(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)^2}{(\beta \mathbf{V}_0)^2}\right) \equiv \kappa_{0,\text{res}} \exp\left(\frac{(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)^2}{(\beta \mathbf{V}_0)^2}\right); \quad (29)$$

— показатель спада функции Холстейна γ (9), описывающий степень нелокальности переноса флуктуаций плотности;

— средняя тепловая скорость «почти стоящих» флуктуаций плотности V_T , описывающая ширину распределения по скоростям и играющая роль, аналогичную введённому параметру α для бегущих флуктуаций;

— коэффициент поглощения для «почти стоящих» флуктуаций плотности $\kappa_{0,c}$ при задании функции Холстейна в виде $T_c(\rho) = \exp(-\kappa_{0,c}\rho)$ для «почти стоящих» флуктуаций;

— относительное количество (статвес) бегущих флуктуаций, скорости которых направлены по малому радиусу плазменного шнура от наблюдателя A_{left} и к нему A_{right} (схема эксперимента показана в [40, рис. 1—3]), а также «почти стоящих» флуктуаций A_{centr} .

При решении обратной задачи предполагается, что средняя длина пробега бегущих флуктуаций плотности много больше, чем таковая у «почти стоящих» флуктуаций, т.е. $\kappa_{0,c} \gg \kappa_0$.

В моделях турбулентности, ранее использованных для интерпретации результатов измерений в [40, с. 449], имелись свободные параметры, присутствующие и в нашей модели, а именно:

— среднее время жизни флуктуаций плотности τ (отметим, что функция распределения по времени жизни берётся экспоненциальной, что сделано и в нашей модели);

— средняя скорость движения бегущих флуктуаций $\mathbf{V}_0$;

— средняя длина свободного пробега бегущих флуктуаций $1/\kappa_0$.

Нами добавлены следующие важные параметры, что стало возможным благодаря описанию флуктуаций плотности с помощью кинетического уравнения для эволюции флуктуаций плотности:

— ширина функции распределения флуктуаций плотности по скоростям в единицах средней скорости, т.е. эффективная температура, например, ширина гауссовского распределения по скоростям. Эта величина даёт вклад в ширину боковых компонентов спектральной интенсивности рассеянного излучения в дублете Манделштама—Бриллюэна (это соответствует параметру α);

— ширина функции распределения по длинам свободного пробега (ФРСП) (это соответствует параметру γ в ФРСП).

При решении поставленной обратной задачи восстановления характеристик флуктуаций плотности из экспериментальных данных рефлектометрии на токамаке Т-10 [40, рис. 4—6] можно определить численные значения искомых параметров.

Входные параметры обратной задачи:

— $K = 16,3 \text{ см}^{-1}$ (модуль волнового вектора рассеяния K (14), он задан геометрией диагностики, при этом значение коэффициента преломления бралось близким к единице с учётом флуктуаций плотности вблизи поверхности, на которой происходит отражение зондирующей волны в приближении квази-однородной среды);

— $\sigma\tau = 20$ — это отношение среднего времени остановки рассеивателей к среднему времени их исчезновения, а не превращения в почти стоящие рассеиватели, впрочем, этот параметр выпадает из кросс-корреляционной функции из-за его сокращения в числителе и знаменателе.

Первыми искомыми параметрами, найденными на первом этапе оптимизации из положения максимумов квазикогерентных компонентов в спектре рассеяния, являются средние значения продольной $V_{0,\parallel}$ и поперечной $V_{0,\perp}$ по отношению к вектору рассеяния скорости бегущих флуктуаций рассеивателей: $V_{0,\parallel} = V_{0,\perp} = 4,2 \cdot 10^4$ см/с. Важно отметить, что точность оценки модуля вектора рассеяния ограничена тем, что показатель преломления в точке отражения («отсечки») О-волны вообще обращается в нуль, и необходимо решение волновой задачи отражения от слоя плазмы с немалыми флуктуациями плотности. Кроме того, существенный вклад в рассеяние могут давать участки на пути к отсечке. Поэтому, строго говоря, по положению пиков в дублете Мандельштама—Бриллюэна можно найти лишь произведение вектора рассеяния на среднюю скорость бегущих флуктуаций плотности. Однако и в условиях ограниченной точности восстановления указанных параметров можно получить разумные оценки искомой степени нелокальности переноса флуктуаций плотности.

Остальные искомые параметры, т.е. найденные решением обратной задачи, имеют вид: $A_{\text{left}} = 0,01$; $A_{\text{right}} = 0,013$; $A_{\text{centr}} = 0,01$; $\alpha = 0,458$; $V_T = 10^4$ см/с; $V_{\text{pol}} = 2 \cdot 10^4$ см/с; $\kappa_{0,\text{res}} = 0,3$ см $^{-1}$; $\beta = 1$; $\kappa_{0,c} = 10$ см $^{-1}$; $\gamma = 0,55$, где V_{pol} — скорость полоидального вращения плазмы.

На рис. 1—4 показаны результаты восстановления и сравнение экспериментальных и расчётных теоретических кривых.

На рис. 1 видно, что боковые компоненты спектра рассеяния при частоте $f \equiv \omega/(2\pi) \approx \pm 110$ кГц, где ω — сдвиг частоты рассеянного излучения относительно частоты зондирующей волны согласно (3), получившие название квазикогерентных колебаний [41—43], можно интерпретировать как дублет Мандельштама—Бриллюэна при рассеянии света в упругой среде. Поэтому по расположению пика и ширине спектра рассеянного излучения можно путём решения обратной задачи найти значение проекции средней скорости флуктуаций на направление вектора рассеяния $\mathbf{K}$ (с указанной ранее оговоркой) и дисперсию скорости бегущих флуктуаций, описываемую параметром α . Параметры разряда на рис. 1—3: сила тока $I = 160$ кА, магнитное поле $B = 2,5$ Тл, плотность электронов $n_e = 1,2 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$. Радиальная координата точки отражения зондирующего луча $r = 19,5$ см (предположительно, точки рассеяния зондирующей волны).

Для иллюстрации относительной роли разных механизмов уширения спектра в квазикогерентных компонентах на рис. 2 показаны спектры для монохроматического распределения флуктуаций плотности по скоростям. Видно, что уширение вследствие конечной длины пробега намного меньше «теплого» уширения бегущих флуктуаций, определяемого шириной их распределения по скоростям.

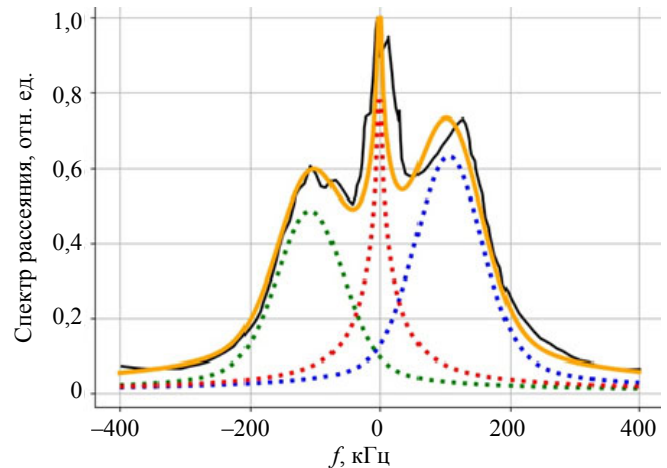


Рис. 1. Спектр излучения, рассеянного бегущими и почти стоящими флуктуациями плотности: экспериментальный спектр [40, рис. 4, а] (—); результат наилучшей подгонки этого спектра (—), рассчитанный по (21). Показаны отдельные компоненты спектра: вклады почти стоящих флуктуаций (•••, $V_T \approx 0$), радиально бегущих флуктуаций в сторону от точки наблюдения (•••, $V_T < 0$) и к ней (•••, $V_T > 0$)

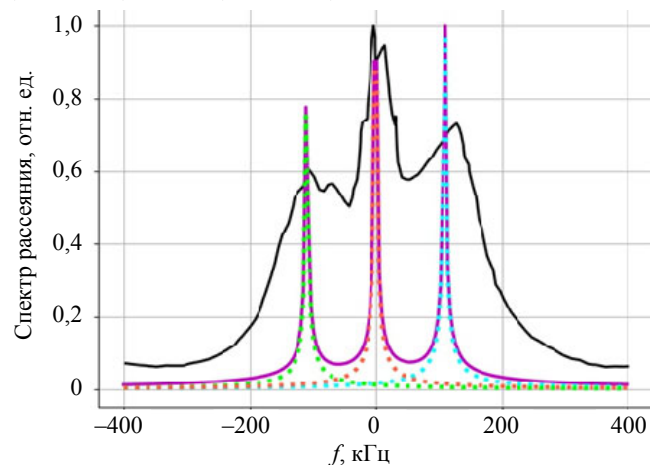


Рис. 2. Спектр рассеянного излучения при монохроматическом распределении бегущих и почти стоящих флуктуаций плотности по скоростям (—, $\alpha \rightarrow 0$, $V_T \rightarrow 0$) (21) в сравнении с экспериментальным спектром [40, рис. 4, а] (—). Показаны отдельные компоненты спектра: вклад почти стоящих флуктуаций (•••, $V_T \approx 0$), радиально бегущих флуктуаций в сторону от точки наблюдения (•••, $V_T < 0$) и к ней (•••, $V_T > 0$)

Результаты решения обратной задачи для кросс-корреляционной функции для рефлектометрии на токамаке Т-10 [40] показаны на рис. 3 (спектральное распределение при одинаковой радиальной координате и различных полоидальных координатах двух точек с расстоянием между ними 1 см) и на рис. 4 (зависимость от радиального расстояния между двумя точками при одинаковой полоидальной координате для различных частот рассеянного излучения).

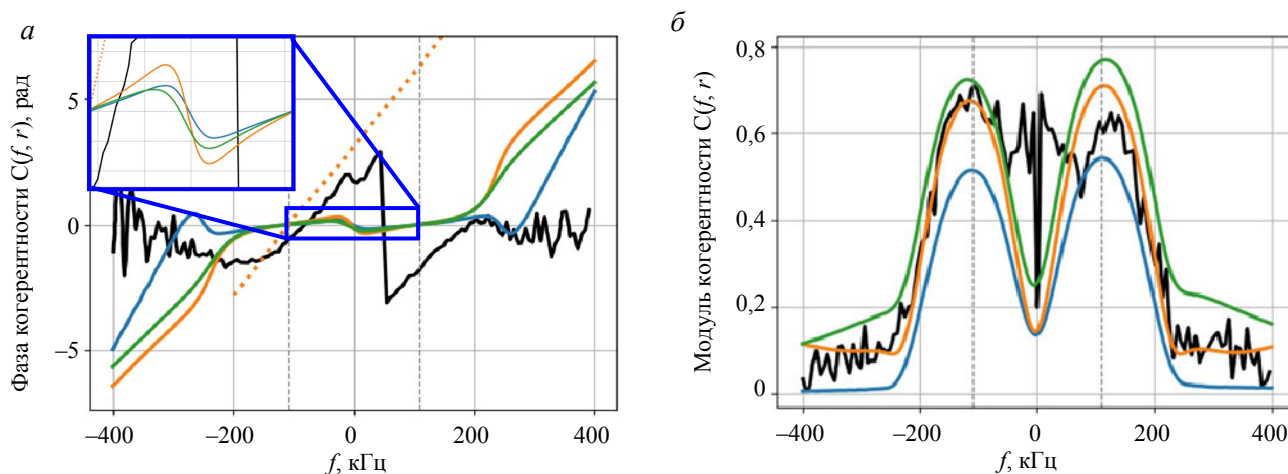


Рис. 3. Сравнение расчётов корреляционной функции (25) без учёта множителя $\exp(iKr)$ с найденными оптимальными значениями для подгонки экспериментальных данных для спектра рассеяния и координатной зависимости корреляционной функции (результаты подгонки показаны на рис. 1—4, а, б). Показаны результаты значений полоидальной скорости вращения плазмы: фаза когерентности (25) (а) и модуль когерентности (25) как функции частоты (б); $\cdots$ — спектр кросс-фазы в случае монохроматического распределения флуктуаций плотности по их скоростям для одной полоидальной скорости; — экспериментальная [40, рис. 4, б] и [40, рис. 4, с] (в верхнем левом углу показан в увеличенном масштабе выделенный прямоугольник (а)); — $V_{pol} = 1 \cdot 10^5$ см/с; — $V_{pol} = 2 \cdot 10^5$ см/с; — $V_{pol} = 3 \cdot 10^5$ см/с. Вертикальные пунктиры соответствуют максимумам в спектре рассеяния на рис. 1

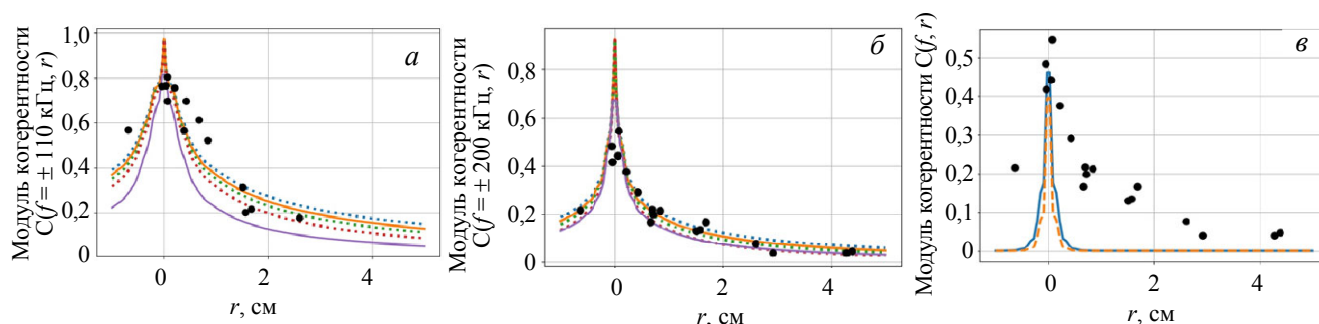


Рис. 4. Координатная зависимость модуля когерентности (25) для частот $f = \pm 110$ кГц (а) и $f = \pm 200$ кГц (б) при параметрах: $\gamma = 0,5$ ($\cdots$); $\gamma = 0,55$ (—); $\gamma = 0,6$ ($\cdots$); $\gamma = 0,7$ ($\cdots$); — частота рассчитана при $k_0 = 1$ см $^{-1}$ в функции Холстейна (9) при $\gamma = 0,55$, для остальных кривых коэффициент поглощения зависит от скорости — согласно (29); • — экспериментальные значения квазикогерентных колебаний [40, рис. 5, а] (а); широкополосные колебания [40, рис. 5, б] (б, в). На рис. 4, в показан модуль корреляционной функции («модуль когерентности») для частот $f = \pm 300$ кГц (—) и $f = \pm 400$ кГц (---)

На рис. 3, а видно, что наклон расчётной фазы, усреднённый по всему участку спектра каждого квазикогерентного компонента (левого или правого), примерно совпадает с наклоном экспериментальной кривой только при усреднении по всему интервалу частот. Однако имеется неплохое совпадение теоретических и экспериментальных результатов для модуля корреляционной функции при одном из значений полоидальной скорости вращения плазмы, как видно на рис. 3, б (модуль комплексной функции парных корреляций часто называют функцией когерентности). Сканирование расчётов спектра модуля кросс-корреляционной функции по полоидальной скорости вращения плазмы позволяет в силу существенной зависимости спектра от этой скорости найти её оптимальное значение в рассматриваемом случае зондирования на токамаке Т-10, при котором проводилось исследование полоидальных корреляций флуктуаций плотности плазмы на одной магнитной поверхности при радиальной направленности зондирующего излучения в разные точки отражения на этой магнитной поверхности.

На рис. 3, а для оптимального значения скорости полоидального вращения показано сравнение теоретических расчётов для двух различных функций распределения флуктуаций плотности по скоростям — монохроматического и гауссовского с шириной, полученной решением обратной задачи подгон-

ки экспериментальных данных для спектра рассеянного излучения. Видно, что расчёт средней скорости по «монохроматической» по скоростям формуле (28) даёт существенно более высокую оценку, чем в случае гауссовского распределения с той же средней скоростью.

Сравнение теоретических и экспериментальных корреляционных функций как функций радиального расстояния между двумя точками с одинаковой полоидальной координатой для различных частот рассеянного излучения показано на рис. 4. При этом результаты на рис. 4, а показывают сравнение теоретических кривых для разных значений параметра нелокальности γ для иллюстрации чувствительности результата оптимизации к этому параметру. Параметры разряда для рис. 4: сила тока $I = 140$ кА; магнитное поле $B = 2,5$ Тл; плотность электронов $n_e = 1,2 \cdot 10^{13}$ см⁻³. Радиальная координата отсчитывается от точки отражения зондирующего луча $r = 10$ см (предположительно, точки рассеяния зондирующей волны).

Для широкополосных колебаний с частотой $f = \pm 200$ кГц показана возможность очень хорошего совпадения модельной радиальной корреляционной функции с экспериментальными данными (см. рис. 4, б). Для больших частот (см. рис. 4, в) видно быстрое затухание расчётной кривой.

Важно отметить, что выбор оптимального значения параметра γ основан на решении обратной задачи по подгонке экспериментальных данных не только для радиальной корреляционной функции (см. рис. 4), но и одновременно для спектра рассеяния (см. рис. 1).

Сравнение полученных нами результатов с результатами теоретической модели [40, рис. 13] показывает, что из-за монохроматичности распределения по скоростям в модели [40] совпадение рассчитанной там кросс-фазы с экспериментом существенно лучше, чем в нашей модели. Однако по этой же причине совпадение спектров рассеяния в [40] хуже, так как спектральные пики квазикогерентных компонентов более острые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена применению формализма супердиффузии для описания кинетики движущихся флуктуаций плотности в турбулентной среде и формулировке алгоритма восстановления нелокальных свойств стохастических процессов в среде по спектру флуктуаций её плотности, диагностируемого по спектрам рассеяния ЭМ-волн в среде. Разработанный подход основан на применении концепции прогулок Леви к описанию нелокальных свойств флуктуаций плотности турбулентной среды. Данный подход позволяет определить эти свойства по спектрам рассеяния ЭМ-волн и кросс-корреляционной рефлектометрии. Предложена система уравнений для флуктуаций плотности, сводящаяся к интегральному уравнению для парной корреляционной (кросс-корреляционной) функции флуктуаций плотности плазмы. Это уравнение выражается через функционал Холстейна, характерный для широкого круга процессов нелокального переноса, включая перенос резонансного излучения в плазме и газах в модели Бибермана—Холстейна. Получено универсальное описание связи наблюдаемого в токамаках квазикогерентного компонента в спектре рассеянных ЭМ-волн в плазме с процессом типа рассеяния Мандельштама—Бриллюэна. Показано, что нелокальность пространственных корреляций в турбулентной среде обусловлена длиннопробежными флуктуациями плотности, для которых функция распределения по длине свободного пробега описывается распределением Леви. Эффективность предлагаемого метода показана на примере интерпретации данных радиальной и полоидальной корреляционной рефлектометрии ЭМ-волн радиочастотного диапазона для диагностики турбулентной плазмы в токамаке T-10.

Найденное нами значение параметра $\gamma = 0,55$, описывающего степень нелокальности переноса бегущих радиально флуктуаций плотности плазмы в токамаке и являющегося ключевой характеристикой функции распределения по длине свободного пробега переносчиков возмущения среды, довольно близко к значению аналогичного параметра $\gamma \approx 2/3$ в эмпирическом законе Ричардсона [35] для динамики фронта возмущения среды от мгновенного точечного источника в случае гидродинамической турбулентности (такое значение параметра γ в законе Ричардсона $t^{3/2}$ следует из (7.7) и (7.8) в [31]). Это является аргументом в пользу того, что наблюдаемые флуктуации плотности в токамаке T-10 могут иметь турбулентное происхождение.

Развиваемый нами подход в идейном плане восходит к гипотезе [34] о возможности описания нелокальных свойств стохастических нелинейных процессов, включая турбулентность гидродинамического движения непрерывных сред, с помощью линейного интегро-дифференциального уравнения с медленно спадающим ядром, что соответствует супердиффузионному (нелокальному) переносу в режиме прогулок Леви (полётов Леви с учётом конечной скорости переносчиков). Полученные в [34] законы подобия позволили на качественном уровне установить связь с законом Ричардсона и турбулентностью Колмогорова. В настоящей работе сформулирован близкий подход, существенно отличающийся физико-математической моделью, но сохраняющий опору на прогулки Леви и предположение о том, что нелинейные свойства процессов переноса частиц и ЭМ-полей в плазме заключены в существовании локализованных переносчиков с большой длиной свободного пробега. При этом конкретная модель физического процесса, описывающего те или иные переносчики возмущения среды, остаётся неизвестной, а найденные параметры (скорость движения флуктуации плотности в плазме, характерная длина свободного пробега, дисперсия функции распределения по длине свободного пробега) являются входными параметрами для последующего решения обратных задач определения конкретного физического механизма эволюции флуктуаций плотности, совместимого с наблюдаемыми спектрами рассеяния зондирующего ЭМ-поля и кросс-корреляции рассеянных электрических полей. Таким образом, с помощью предлагаемого нами подхода пройдена только часть пути, но зато найдены универсальные свойства переноса флуктуаций плотности, позволившие, в частности, указать аналогию явления квазикогерентных колебаний [41—43] с рассеянием Мандельштама—Бриллюэна. Фактически впервые решена обратная задача восстановления параметров флуктуаций плотности плазмы токамака, возможно, ответственных за наблюдаемые квазикогерентные колебания, путём прямого сравнения теории и эксперимента для кросс-корреляционной функции рефлектометрии как функции не одного, а двух аргументов — частоты электрического поля рассеянного ЭМ-излучения и пространственной координаты (малого радиуса для радиальных корреляций или расстояния вдоль магнитной поверхности для полоидальных корреляций).

Важно отметить, что квазикогерентный компонент в спектре можно рассматривать не как движение флуктуаций плотности в системе покоя плазмы, что принято в развиваемом нами подходе, а как результат рассеяния зондирующего ЭМ-излучения на флуктуациях плотности, которые можно считать статическими, т.е. стоящими в системе покоя плазмы, и движущимися относительно приёмника отражённого излучения только по причине тороидального и полоидального вращения плазмы как целого, т.е. гидродинамического движения плазмы в токамаке. В этом случае в точке наблюдения, выделяемой условиями приёма сигнала в предположении локальности рассеяния зондирующего излучения, также будет радиальное движение плазмы вперёд и назад с одинаковой скоростью относительно приёмника излучения. При этом радиальная корреляция будет отражать корреляцию пространственной структуры, стоящей относительно плазмы, и фактически также характеризовать формирование (перенос) возмущений в радиальном направлении, без которого такая корреляция была бы невозможна. Поэтому в любом случае предлагаемая нами модель описывает корреляционные свойства флуктуаций плотности плазмы, а в случае радиальной рефлектометрии позволяет оценить меру нелокальности радиальных связей в плазме.

В заключение отметим, что настоящая работа является результатом применения общего теоретического подхода [28—33] к практической задаче управляемого термоядерного синтеза и демонстрирует актуальность развития аналитических подходов в теории нелокального переноса (современный обзор статуса и истории аналитических подходов в теории нелокального переноса излучения можно найти в [50]).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90281.

Авторы выражают благодарность В.А. Вершкову и Д.А. Шелухину за обсуждение результатов измерений на токамаке Т-10 и настоящей работы, В.С. Неверову за обсуждение методов численного расчёта фурье-образов. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт» (<http://ckp.nrcki.ru/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. — San Francisco: W.H. Freeman & Company, 1982, 460 p.
2. Shlesinger M., Zaslavsky G.M., Frisch U. Lévy Flights and Related Topics in Physics. — New York: Springer, 1995. 365 p.
3. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction, — Intern. J. Bifurcation Chaos, 2008, vol. 18, p. 2649.
4. Klafter J., Sokolov I.M. Anomalous diffusion spreads its wings. — Physics World, 2005, vol. 18, p. 29.
5. Eliazar I.I., Shlesinger M.F. Fractional motions. — Phys. Rep., 2013, vol. 527, p. 101—129.
6. Shlesinger M.F., Klafter J., Wong J. — J. Stat. Phys., 1982, vol. 27, p. 499
7. Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. — ЖЭТФ, 2002, вып. 121(2), с. 299—307.
8. Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. — Письма в ЖЭТФ, 2003, вып. 77(9), с. 654—658.
9. Zaburdaev V., Denisov S., Klafter J. Lévy walks. — Rev. Mod. Phys., 2015, vol. 87, p. 483.
10. Mihalas D. Stellar Atmospheres. — San Francisco: W.H. Freeman & Company, 1970. 399 p.
11. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. — М.: Наука, 1969. 472 с.
12. Минин И.Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет. — М.: Наука, 1988. 263 с.
13. Grinin V.P., Harutyunian H., Il'in V.B., Kholtygin A.F., Nikoghossian A. Radiation mechanisms of astrophysical objects: classics today. — In: Proc. of the Conf. in Honor of the 100th Birthday of Academician V.V. Sobolev. St. Petersburg, September 21—25. — Erevan: Edit Print, 2015. 435 p.
14. Kukushkin A.B., Lisitsa V.S., Saveliev Yu.A. Nonlocal transport of thermal perturbations in a plasma. — JETP Lett., 1987, vol. 46, p. 448.
15. Биберман Л.М. — ЖЭТФ, 1947, вып. 17, с. 416.
16. Holstein T. — Phys. Rev., 1947, vol. 72, p. 1212.
17. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. — М.: Наука, 1982. 378 с.
18. Векленко Б.А. О функции Грина уравнения диффузии резонансного излучения. — ЖЭТФ, 1959, вып. 36, с. 204.
19. Kogan V.I. A Survey of Phenomena in Ionized Gases. — In: Proc. ICP'67. — Vienna: IAEA, 1968. 583 p.
20. Абрамов В.А., Коган В.И., Лисица В.С. Перенос излучения в плазме. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1982, вып. 12, с. 114.
21. Коган В.И. Запирание излучения в плазме. — В кн.: Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Под ред. В.Е. Фортова. — М.: Наука, 2000, вводный т. 1, с. 481.
22. Biberman L.M. — Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1948, вып. 49, с. 659.
23. Kalkofen W. Methods in Radiative Transfer. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984. 450 p.
24. Rybicki G.B. Escape Probability Methods. — In: Methods in Radiative Transfer. Ed. W. Kalkofen. Cambridge: Cambridge University Press, 1984, p. 21—64.
25. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Лагарьков А.Н. Перенос излучения в ионизационном континууме. — Оптика и спектроскопия, 1965, т. 19, с. 326.
26. Напартович А.П. — Теплофизика высоких температур, 1971, вып. 9, с. 26.
27. Старостин А.Н. Перенос резонансного излучения. — В кн.: Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Под ред. В.Е. Фортова. — М.: Наука, 2000, вводный т. 1, с. 471.
28. Kukushkin A.B., Sdvizhenskii P.A. — J. Phys. A: Math. Theor., 2016, vol. 49, p. 255002.
29. Kukushkin A.B., Kulichenko A.A. Automodel solutions for superdiffusive transport by Lévy walks. — Phys. Scripta, 2019, vol. 94, p. 115009.
30. Куличенко А.А., Кукушкин А.Б. Супердиффузионный перенос «прогулками Леви» в однородной среде: общее и приближенное автомодельное решения. — ЖЭТФ, 2020, т. 157, вып. 6, с. 1036—1050.
31. Кукушкин А.Б., Куличенко А.А., Соколов А.В. Законы подобия для функции Грина нестационарного супердиффузионного переноса: прогулки Леви и полеты Леви. — ЖЭТФ, 2021, т. 159, вып. 5, с. 978—996.
32. Kulichenko A.A., Kukushkin A.B. Superdiffusive transport of Biberman—Holstein type for a finite velocity of carriers: general solution and the problem of automodel solutions. — Intern. Rev. of Atom. and Molec. Phys. (IRAMP), 2017, vol. 8(1), p. 5—14.
33. Kukushkin A.B., Kulichenko A.A., Neverov V.S., Sdvizhenskii P.A., Sokolov A.V., Voloshinov V.V. Self-similar solutions in the theory of nonstationary radiative transfer in spectral lines in plasmas and gases. — Symmetry, 2021, vol. 13(3), p. 394.
34. Shlesinger M.F., West B.J., Klafter J. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol. 58, p. 1100.
35. Richardson L.F. — Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1926, vol. 110, p. 709.
36. Kolmogorov A.N. — Dokl. Acad. Sci. URSS, 1941, vol. 30, p. 301.
37. Korolev V.Yu., Skvortsova N.N. et al. Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence. — Boston: Leiden, 2006. 409 p.
38. Gusakov E., Irzak M., Popov A. — Plasma Phys. Controlled Fusion, 2014, vol. 56, p. 025009.
39. Piliya A.D., Popov A.Yu. — Plasma Phys. Controlled Fusion, 2002, vol. 44, p. 467.
40. Urazbaev A.O., Vershkov V.A., Soldatov S.V., Shelukhin D.A. — Plas. Phys. Rep., 2006, vol. 32, № 6, p. 443—460.
41. Vershkov V.A., Soldatov S.V., Shelukhin D.A. Dependence of core turbulence on the discharge parameters on T-10 and its correlation with transport. — In: Proc. 16th Fusion Energy Conf. Montreal, Canada, 7—11 October. — Vienna: IAEA, 1996, vol. 1, p. 519—533.
42. Vershkov V.A., Soldatov S.V., Dreval V.V. A three wave heterodyne correlation reflectometer developed in the T-10 tokamak. — Rev. Sci. Instrum., 1999, vol. 70, p. 1700.
43. Osipenko M.B., and T-10 Team. Transport and turbulence studies in the T-10 tokamak. — Nucl. Fusion, 2003, vol. 43, p. 1641.

44. **Melnikov A.** Evolution of heavy ion beam probing from the origins to study of symmetric structures in fusion plasmas. — *Symmetry*, 2021, vol. 13, p. 1367.
45. **Vershkov V.A., Buldakov M.A., Subbotin G.F., Shelukhin D.A. et al.** — *Nucl. Fusion*, 2019, vol. 59, p. 066021.
46. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2005, с. 656.
47. **Бекефи Дж.** Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971. 438 с.
48. **Кукушкин А.Б.** — *Физика плазмы*, 1981, т. 7, вып. 1.
49. **Гусаков Е.З., Попов А.Ю.** — Нелинейная теория радиальной корреляционной рефлектометрии. — В сб.: XXIX Звенигородская конференция по физике плазмы и УТС. Москва, РАН, 25 февраля — 1 марта 2002 г.
50. **Ivanov V.V.** $\sqrt{\epsilon}$ Law: Centennial of the First Exact Result of Classical Radiative Transfer Theory. — In: Kokhanovsky A. (eds). *Springer Series in Light Scattering. Volume 6: Radiative Transfer, Light Scattering, and Remote Sensing*. Springer, Cham, 2021.



Александр Борисович Кукушкин, в.н.с., д.ф.-м.н.; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия; профессор; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409 Москва, Каширское ш. 31, Россия; профессор, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер. 9, Россия
Kukushkin_AB@nrcki.ru



Андрей Александрович Куличенко, инженер; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия
Kulichenko_AA@nrcki.ru

Статья поступила в редакцию 15 января 2022 г.

После доработки 16 марта 2022 г.

Принята к публикации 25 марта 2022 г.

Вопросы атомной науки и техники.

Сер. Термоядерный синтез, 2022, т. 45, вып. 2, с. 105—122.