

УДК 517.972.6

## О ТОРОИДАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНОЙ

В.И. Ильгисонис<sup>1-3</sup>, А.А. Скворода<sup>1</sup>, Е.А. Сорокина<sup>1-3</sup><sup>1</sup>НИИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия<sup>2</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия<sup>3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Показано, что экстремаль объёма, заключённого внутри тороидальной поверхности заданной площади, доставляется поверхностью постоянной средней кривизны. Получено точное решение соответствующей вариационной задачи, и проведён его параметрический анализ в пределах большой и малой средней кривизны. Доказано отсутствие гладких торов постоянной средней кривизны и продемонстрировано, что искомая экстремальная поверхность имеет, по крайней мере, одно ребро, расположенное на наружном обводе тора.

**Ключевые слова:** поверхности постоянной средней кривизны, торы, токамак.

## ON THE TOROIDAL SURFACES OF REVOLUTION WITH CONSTANT MEAN CURVATURES

V.I. Ilgisonis<sup>1-3</sup>, A.A. Skovoroda<sup>1</sup>, E.A. Sorokina<sup>1-3</sup><sup>1</sup>NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia<sup>2</sup>Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia<sup>3</sup>National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia

It is shown that the surface with constant mean curvature encloses the extremal volume among all toroidal surfaces of given area. The exact solution for the corresponding variational problem is derived, and its parametric analysis is performed in the limits of high and small mean curvatures. An absence of smooth torus with constant mean curvature is proved, and the extremal surface is demonstrated to have at least one edge located on the outer side of the torus.

**Key words:** surfaces with constant mean curvature, tori, tokamak.

### ВВЕДЕНИЕ

Среди систем магнитного удержания высокотемпературной плазмы наибольшее распространение получили токамаки — осесимметричные системы, в которых силовые линии магнитного поля

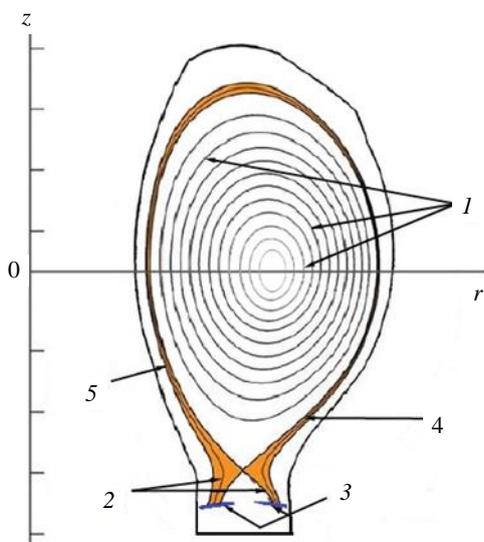


Рис. 1. Сечение плоскостью  $r$ — $z$  магнитной конфигурации типового токамака: 1 — сечения магнитных поверхностей; 2 — дивертор; 3 — диверторные пластины; 4 — сепаратриса; 5 — засепаратрисный слой (scrape-off layer)

образуют набор тороидально вложенных поверхностей [1], называемых «магнитными поверхностями» (см. рис. 1). Геометрические свойства этих поверхностей в значительной степени определяют способность токамака удерживать плазму, а также устойчивость плазмы по отношению к магнито-гидродинамическим и дрейфовым возмущениям. В частности, важное значение имеют характеристики кривизны силовых линий и магнитных поверхностей в целом, определяющие дрейфы заряженных частиц плазмы, направление её макроскопического вращения и возможность раскачки ряда неустойчивостей плазмы (см., например, [2—4]). Наряду с этим задача оптимизации токамака требует увеличения отношения объёма удерживаемой тороидальной плазмы к площади, ограничивающей плазму тороидальной поверхности, через которую происходят потери частиц и энергии.

В данной статье показано, что такая оптимизация естественным образом приводит к задаче нахождения тороидальной поверхности с постоянной средней кривизной. Как известно, теорема Александра [5] доказывает отсутствие гладких торов без самопересечений с постоянной средней кривизной. Вместе с тем существуют примеры незамкнутых поверхностей с постоянной средней кривизной, к числу которых относятся нодоиды и ондулоиды [6]. Проведённое далее рассмотрение доказывает, что тороидальные поверхности вращения максимального объёма обладают постоянной средней кривизной почти всюду, имея как минимум одно ребро. Важность таких конфигураций в теории магнитных ловушек обсуждалась в [7]. В частности, применительно к магнитной конфигурации токамака это означает возможности организации дивертора — устройства, собирающего потоки вылетающих из системы частиц плазмы и предохраняющего тем самым от повреждений стенку камеры токамака (см. рис. 1).

### ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О ТОРЕ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЁМА

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти кривую вращения  $z(r)$  (вращение вокруг оси  $z$  — прямой  $r = 0$  в цилиндрических координатах  $\{r, \theta, z\}$ ), однозначно определённую в интервале  $r \in [r_1, r_2]$  и закрывающую максимальный объём при заданной величине поверхности  $S$ , такую, что  $z(r_1) = z(r_2) = 0$ . Объём будем отсчитывать от плоскости  $z = 0$ . Впоследствии вместо задания величины поверхности можно будет задать значение  $z_m = \max_{r \in [r_1, r_2]} (z(r))$ . Другими словами, фиксируем три числа:  $r_1$ ,  $r_2$  и  $S$  (или  $z_m$ ).

Искомый объём равен

$$V = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r z(r) dr,$$

поверхность

$$S = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \sqrt{1 + z_r'^2},$$

где  $z_r' = dz/dr$ .

Решение должно иметь вид экстремали функционала

$$J = V + \lambda RS = 2\pi R^3 \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \tilde{r} \left( \tilde{z} + \lambda \sqrt{1 + \tilde{z}_r'^2} \right) d\tilde{r}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  — множитель Лагранжа, и все величины под интегралом обезразмерены на некоторый характерный радиус  $R$ :

$$\tilde{r} = r/R; \quad \tilde{z} = z/R.$$

Значение  $R$  выберем позже. Уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала  $\tilde{J} = J/(2\pi R^3)$  имеет вид

$$r = \lambda \left( \frac{z'r}{\sqrt{1 + z'^2}} \right)'. \quad (2)$$

Здесь и далее будем опускать тильды, где это не приводит к недоразумениям, а также нижний индекс  $r$  у производной, обозначаемой штрихом. Смысл параметра  $\lambda$  тесно связан с понятием средней кривизны  $H_s$  поверхности, образованной кривой вращения  $z(r)$ , определяемой уравнением (2), а именно:

$$\lambda = \frac{1}{2H_s R}. \quad (3)$$

Напомним, что по определению  $H_s$  — величина локальная, определяемая как среднее арифметическое главных кривизн поверхности в рассматриваемой точке.

Интегрируя (2), получаем

$$r^2 - 2r\lambda \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = c_1, \quad (4)$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования. Выберем нормировочную величину  $R$  так, чтобы значение  $\tilde{r}_R = r/R = 1$  отвечало точке максимума  $z(r)$ , т.е.  $z'(\tilde{r}_R) = 0$ . Тогда из (4) следует  $c_1 = 1$ .

Введём замену переменных  $z' = -\text{tg}\varphi$ , где  $\varphi = 0$  соответствует этой же точке максимума  $z(r)$ :

$$|z(r)| \leq z_m; \quad z_m = z(r)|_{r=1}.$$

В отсутствие иных экстремумов  $z(r)$  на отрезке  $r \in [r_1, r_2]$ , появление которых с очевидностью противоречило бы нашей вариационной задаче, область  $r_1 \leq r < 1$  отвечает значениям  $\varphi < 0$  ( $z' > 0$ ), а область

$1 < r \leq r_2$  — значениям  $\varphi > 0$  ( $z' < 0$ ). Поэтому  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и для всех  $\varphi \cos \varphi \geq 0$ .

Перепишав уравнение (4) в виде

$$r^2 + 2r\lambda \sin\varphi = 1,$$

находим

$$r = -\lambda \sin\varphi \pm \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}.$$

Поскольку при  $\varphi = 0$  величина  $r = 1$ , двойственность в решении устраняется, т.е.

$$r = -\lambda \sin\varphi + \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}. \quad (5)$$

При этом должно быть  $\lambda < 0$ , чтобы меньшие значения  $\varphi$  отвечали меньшим значениям  $r$ , как это предполагалось.

Зависимость  $z(r)$  находим следующими манипуляциями:

$$z' = -\text{tg}\varphi;$$

$$\frac{dz}{d\varphi} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^{-1} = -\text{tg}\varphi;$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \lambda \sin\varphi \left( 1 - \frac{\lambda \sin\varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}} \right);$$

$$z = -\lambda \cos\varphi - \frac{\lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} (F - (1 + \lambda^2)E) + c_2, \quad (6)$$

где эллиптические интегралы  $F$  и  $E$  берутся как функции аргументов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\sqrt{1 + \lambda^2} \sin\varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (7)$$

Так как  $F(0, \alpha) = E(0, \alpha) = 0$ , то  $z(\varphi = 0) = c_2 - \lambda$ , т.е.  $c_2 = z_m + \lambda$ .

### ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Построим приближённое решение задачи для случая  $\lambda^2 \ll 1$ . Из системы (5), (6) имеем

$$\begin{cases} r \approx 1 - \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2\varphi; \\ z \approx z_m + \lambda(1 - \cos\varphi) - \frac{\lambda^2}{2} \left( \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

— с учётом уже описанного выбора постоянной интегрирования. Пренебрежение членами  $\sim \lambda^2$  в (8) даёт решение в виде дуг окружностей, как в изопериметрической задаче. Действительно, при  $\varphi = \varphi_{1,2}$   $z = 0$  и

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{z_m + \lambda}{\lambda} = 1 + \frac{z_m}{\lambda} = 1 - \frac{z_m}{|\lambda|}.$$

Отсюда находим граничные значения угла  $\varphi$  в диапазоне  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\varphi_{1,2} = \pm \arccos \left( 1 - \frac{z_m}{|\lambda|} \right), \quad (9)$$

причём  $|\lambda| \geq z_m$ . Тогда

$$\sin \varphi_{1,2} = \mp \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{1,2}} = \mp \sqrt{1 - \left( 1 + \frac{z_m}{\lambda} \right)^2} = \mp \sqrt{\frac{z_m(-2\lambda - z_m)}{\lambda^2}} = \mp \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{z_m(2|\lambda| - z_m)}.$$

Условия

$$\begin{cases} r_1 \approx 1 - \sqrt{z_m(2|\lambda| - z_m)}; \\ r_2 \approx 1 + \sqrt{z_m(2|\lambda| - z_m)} \end{cases} \quad (10)$$

позволяют, вернувшись к размерным переменным, по заданным  $r_1$ ,  $r_2$  и  $z_m$  определить искомые  $R$  и  $\lambda$ . Если же говорить собственно о безразмерном решении, задаваемом (10), то из-за связи  $\tilde{r}_1$  и  $\tilde{r}_2$  достаточно задать только два безразмерных числовых параметра, в качестве которых удобно выбрать  $r_1$ :  $0 < \tilde{r}_1 < 1$  и  $\tilde{z}_m$ . Тогда величина третьего параметра и значение  $\lambda$  находятся из условий (10).

Соотношения (10) можно также получить из явной формы искомой кривой в переменных  $r - z$ . Действительно, в первом порядке разложения по  $\lambda$  из уравнений (8) имеем

$$\begin{cases} \lambda \sin \varphi \approx 1 - r; \\ \lambda \cos \varphi \approx z_m + \lambda - z, \end{cases} \quad (11)$$

так что

$$(r - 1)^2 + (z - z_m - \lambda)^2 \approx \lambda^2. \quad (12)$$

Это же уравнение нетрудно получить, используя только первое из уравнений (11) и связь

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left( \frac{1 - r}{\lambda} \right)^2}$$

(при этом, разумеется,  $1 - |\lambda| \leq r \leq 1 + |\lambda|$ ). Действительно, интегрируя

$$z' = -\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{r - 1}{\lambda} \bigg/ \sqrt{1 - \left( \frac{1 - r}{\lambda} \right)^2} = \frac{1 - r}{\sqrt{\lambda^2 - (1 - r)^2}}$$

с условием  $z(r = 1) = z_m$ , получаем

$$z \approx z_m - |\lambda| + \sqrt{\lambda^2 - (1 - r)^2}, \quad (13)$$

откуда немедленно следует (12).

Используем этот же приём для нахождения зависимости  $z(r)$  с учётом членов  $\sim \lambda^2$  в (8). Из первого уравнения системы (8) имеем

$$\lambda \sin \varphi = \frac{1 - r}{1 - \frac{\lambda}{2} \sin \varphi} \approx \frac{1 - r}{1 - \frac{1}{2}(1 - r)} = 2 \frac{1 - r}{1 + r}. \quad (14)$$

Заметим, что соотношение (14) работает при  $r$ :

$$\frac{1-|\lambda|/2}{1+|\lambda|/2} \leq r \leq \frac{1+|\lambda|/2}{1-|\lambda|/2},$$

что практически соответствует ранее (в первом порядке разложения по  $\lambda$ ) найденной области  $1-|\lambda| \leq r \leq 1+|\lambda|$ . Второе уравнение системы (8) даёт искомую зависимость  $z(r)$  в форме

$$z \approx z_m - |\lambda| + \sqrt{\lambda^2 - \frac{4(r-1)^2}{(r+1)^2}} + \frac{\lambda^2}{2} \left( \arcsin\left(\frac{r-1}{\lambda}\right) - \frac{(r-1)}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{r-1}{\lambda}\right)^2} \right), \quad (15)$$

модифицирующей выражение (13). В отличие от (13) кривая (15) уже не является дугой окружности и не симметрична относительно точки  $r = 1$ .

Положив в (15)  $z = 0$ , можно найти  $\tilde{r}_1$  и  $\tilde{r}_2$ . Как уже отмечалось, это возможно не для любого  $z_m$ . Безразмерные величины  $\tilde{r}_1$ ,  $\tilde{r}_2$  и  $z_m$  не вполне произвольны и в общем случае. Связь между ними удобно проследить в зависимости от величины  $\lambda$ . Очевидно, что поскольку задаваемая (5) зависимость  $\tilde{r}(\varphi)$  монотонна, то  $|\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1| < 2|\lambda|$ . Если теперь задать значение  $\tilde{r}_1$ , то  $\tilde{r}_2$  и  $z_m$  однозначно определяются значением  $\lambda$ . Действительно, в общем случае из (4) находим

$$z(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}} \frac{1-r^2}{\sqrt{4\lambda^2 r^2 - (r^2-1)^2}} dr, \quad (16)$$

откуда немедленно следуют искомые определения

$$\int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \frac{1-r^2}{\sqrt{4\lambda^2 r^2 - (r^2-1)^2}} dr = 0; \quad z_m = \int_{\tilde{r}_1}^1 \frac{1-r^2}{\sqrt{4\lambda^2 r^2 - (r^2-1)^2}} dr. \quad (17)$$

При  $|\lambda| \rightarrow 0$  соотношения (17) дают  $\tilde{r}_2 \approx 1 + |1 - \tilde{r}_1|$ ,  $z_m \approx |\lambda| - \sqrt{\lambda^2 - (1 - \tilde{r}_1)^2}$ , что соответствует (10). При  $|\lambda| \rightarrow \infty$  соотношения (17) интегрируются в виде

$$\frac{1}{2|\lambda|} \left( \ln \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{r}_1} + \frac{1}{2} (\tilde{r}_1^2 - \tilde{r}_2^2) \right) \approx 0; \quad z_m \approx \frac{1}{2|\lambda|} \left( \frac{1}{2} (\tilde{r}_1^2 - 1) - \ln \tilde{r}_1 \right). \quad (18)$$

Как видно из (18), при больших  $|\lambda|$  величина  $\tilde{r}_2$  не меняется, а  $z_m$  убывает как  $\sim |\lambda|^{-1}$ .

В обратную сторону при заданной величине  $\tilde{r}_1 \in (0, 1)$  решение безразмерной задачи в виде

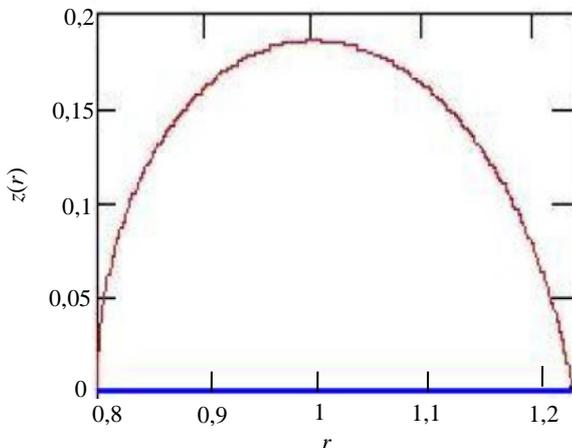


Рис. 2. Образующая поверхности с постоянной средней кривизной для  $\tilde{r}_1 = 0,8$  и  $\lambda = -0,225$ , при этом  $z_m = 0,186$ ,  $\tilde{r}_2 = 1,24$

поверхности постоянной средней кривизны существует лишь для  $z_m < 1$  — только в этом случае в соответствии с (17) существует искомое значение  $\lambda$ . В размерной задаче это отвечает требованию  $z_m < R$ , где величина  $R$  определяется первым из соотношений (17) для заданных  $\tilde{r}_{1,2}$ .

Проиллюстрируем сказанное примерами. На рис. 2—4 показаны кривые (16), рассчитанные для  $\tilde{r}_1 = 0,8$  и различных значений  $\lambda$ :  $-0,225$  (см. рис. 2),  $-0,5$  (см. рис. 3) и  $-2,0$  (см. рис. 4). Видно, что с ростом  $|\lambda|$  величина  $z_m$  убывает, а значение  $\tilde{r}_2$  меняется незначительно. Поверхность, формируемая изображённой на рис. 2 кривой, пе-

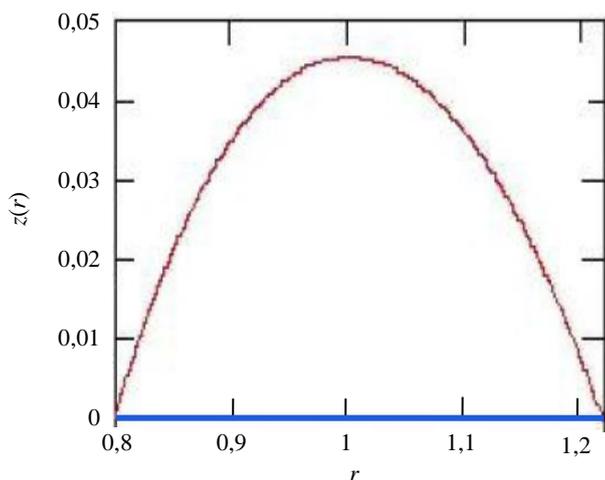


Рис. 3. Образующая поверхности с постоянной средней кривизной для  $\tilde{r}_1 = 0,8$  и  $\lambda = -0,5$ , при этом  $z_m = 0,045$ ,  $\tilde{r}_2 = 1,218$

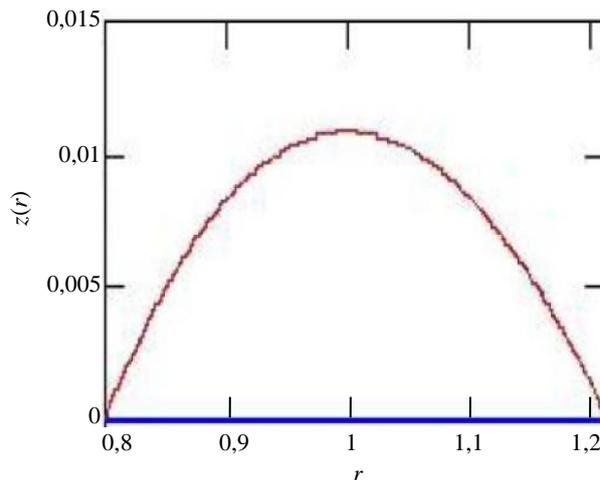


Рис. 4. Образующая поверхности с постоянной средней кривизной для  $\tilde{r}_1 = 0,8$  и  $\lambda = -2,0$ , при этом  $z_m = 0,011$ ,  $\tilde{r}_2 = 1,215$

ресекающей ось  $z = 0$  под прямым углом ( $\varphi_1 = -\pi/2$ ), характерна для петель нодоида. В общем случае кривая (16) пересекает ось  $z = 0$  под углами, отличными от прямого. Таким образом, искомая поверхность имеет, как правило, два ребра.

### О ТЕОРЕМЕ АЛЕКСАНДРОВА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СИММЕТРИЧНЫМ ТОРАМ

Полученное нами общее решение (5)—(7) исходной задачи позволяет доказать утверждение об отсутствии гладких тороидальных поверхностей постоянной средней кривизны, вытекающее из теоремы А.Д. Александрова [5]. Проведём сначала рассуждение в классе симметричных относительно плоскости  $z = 0$  поверхностей. Если бы такая симметричная поверхность существовала, она бы по построению описывалась уравнением (2) с  $\lambda = \text{const}$  и, следовательно, формулами (5)—(7). Искомая гладкая кривая вращения пересекала бы ось  $z = 0$  под прямым углом, т.е. при значениях  $\varphi = \pm\pi/2$  и соответственно  $\alpha_1 = \pm\pi/2$  (см. (7)). В этих точках из (6) для  $z = 0$  имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\mathbf{K}(\alpha_2) + (1+\lambda^2)\mathbf{E}(\alpha_2)) + z_m + \lambda = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(\mathbf{K}(\alpha_2) - (1+\lambda^2)\mathbf{E}(\alpha_2)) + z_m + \lambda = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\alpha_2) = \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_2\right)$  и  $\mathbf{E}(\alpha_2) = \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_2\right)$  — полные эллиптические интегралы (использована не-

чётность эллиптических интегралов  $\{\mathbf{F}, \mathbf{E}\}(-\alpha_1, \alpha_2) = -\{\mathbf{F}, \mathbf{E}\}(\alpha_1, \alpha_2)$ ).

Вычитая уравнения (19), приходим к соотношению

$$\mathbf{K}(\alpha_2) - (1+\lambda^2)\mathbf{E}(\alpha_2) = 0. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что условие (20) не может быть выполнено. Действительно, по определению и с учётом (7)

$$\mathbf{K}(\alpha_2) - (1+\lambda^2)\mathbf{E}(\alpha_2) = \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda^2(\sin^2 x - 1)}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 \sin^2 x}} dx < 0 \quad (21)$$

при  $\lambda \neq 0$ , что доказывает утверждение.

Неравенство (21) позволяет также заключить, что если кривая  $z(r)$ , формирующая симметричную тороидальную поверхность постоянной средней кривизны, пересекает ось  $z = 0$  перпендикулярно, то это происходит при  $r < R$ , а в точке пересечения при  $r > R$  на кривой всегда находится «зубик» (см. рис. 2). Действительно, если данная кривая  $z(r)$  пересекает ось  $z = 0$  при  $\varphi_1 = -\pi/2$ , то в силу (21) второе пересечение, отвечающее зоне  $r > R$ , произойдёт при значении  $\varphi_2 = <\pi/2$ , так как  $z' < 0$  при  $\varphi > 0$ . И наоборот,

если допустить, что кривая  $z(r)$  пересекает ось  $z = 0$  при  $\varphi_1 = \pi/2$ , т.е. под прямым углом, то в силу (21) она уже не пересечёт ещё раз эту ось ни при каком  $\varphi_2 \in [-\pi/2, 0)$ .

Вытекающая из этого же неравенства (21) знакоопределённость разности  $z(\varphi = \pi/2) - z(\varphi = -\pi/2)$  позволяет распространить утверждение и на случай несимметричных поверхностей.

### ПРИМЕР ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Продemonстрируем возможность построения магнитной конфигурации, ограниченной сепаратрисной поверхностью с постоянной средней кривизной, посредством набора витков с током, создающих полоидальное поле, и сравним указанную конфигурацию со «стандартной», полученной из исходной поворотом на  $90^\circ$  вокруг магнитной оси. При такой трансформации  $X$ -точка, расположенная в экваториальной плоскости исходной конфигурации, оказывается в более «привычном» положении в нижней части сечения плазменного шнура. Сравнение проведём при одинаковых полном токе, магнитном поле на оси токамака и среднем (по объёму) давлении плазмы.

Искомая конфигурация, рассчитанная кодом ДИНА [8], показана на рис. 5, здесь же изображены сечения витков с током. С помощью кодов VMES [9] и JMC [10] были проведены расчёты равновесия и МГД-устойчивости плазмы в такой конфигурации вплоть до давления плазмы с  $\beta = 1\%$ .

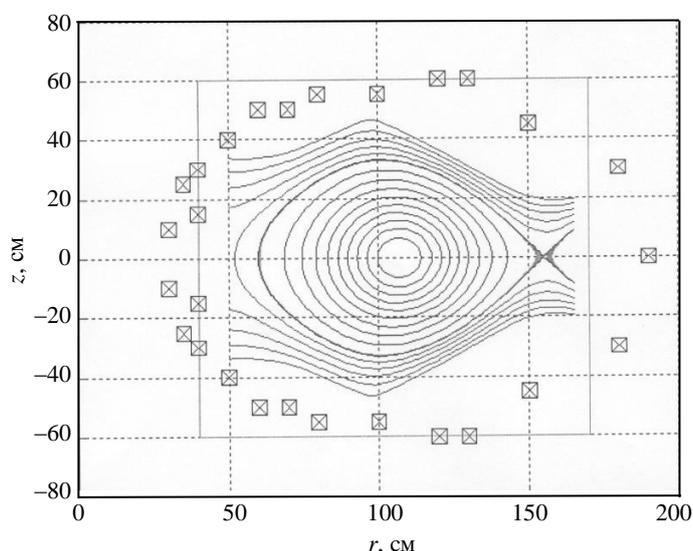


Рис. 5. Пример магнитной конфигурации с сепаратрисной поверхностью постоянной средней кривизны: аспектное отношение 2,7, средний радиус плазмы 0,38 м, эллиптичность 0,73, треугольность 0,08, шафрановское смещение 0,4 см, объём плазмы  $3 \text{ м}^3$

либо явными преимуществами по сравнению с рассмотренной нами конфигурацией с экваториальной  $X$ -точкой не обладает.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали, что поверхность фиксированной площади осесимметричного тора ограничивает максимальный объём в случае, если её средняя кривизна почти всюду постоянна. Такая поверхность должна иметь, по крайней мере, одно ребро, расположенное на внешнем обводе тора. Установлены допустимые диапазоны изменения параметров, характеризующих данную поверхность. Построены точные и приближённые решения соответствующей вариационной задачи, которые могут быть полезны для создания оптимизированных оболочек различных ёмкостей, а также для расчётов магнитных конфигураций установок токамак. Предъявлен численный пример реализации ограничивающей области плазмы сепаратрисы с постоянной средней кривизной. Отметим, что возможность формирования в реальном эксперименте сепаратрисы с  $X$ -точкой, расположенной в экваториальной плоскости токамака,

сомнений не вызывает. Примером может служить японский токамак JT-60 с экваториальной X-точкой, который продемонстрировал в 1985 г. инженерные преимущества расположения диверторных пластин на внешнем обводе токамака [11]. Как известно, вскоре эта установка была переделана в «стандартную» систему JT-60U с нижним расположением X-точки с целью экспериментального обнаружения улучшенного удержания (H-моды). Возможность реализации H-моды в исследуемых конфигурациях с экваториальным расположением X-точки, равно как и другие более «тонкие» свойства таких систем, требует, разумеется, отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при частичной поддержке грантами РФФИ (№ 16-02-00640) и Президента РФ для ведущих научных школ (№ НШ-8243.2016.2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьёв Л.С., Шафранов В.Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. Под ред. М.А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1967, с. 3—208.
2. Морозов А.И., Соловьёв Л.С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. — Там же, вып. 2. Под ред. М.А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963, с. 177—261.
3. Ильгисонис В.И. Классические результаты Б.Б. Кадомцева и вращение плазмы в современных токамаках. — УФН, 2009, т. 179, с. 790—800.
4. Pignonis V.I., Lakhin V.P., Smolyakov A.I., Sorokina E.A. Geodesic acoustic modes and zonal flows in rotating large-aspect-ratio tokamak plasmas. — Plasma Phys. Control. Fusion, 2011, vol. 53, p. 065008.
5. Александров А.Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». — Вестник ЛГУ. Сер. математики, механики и астрономии, 1959, т. 19, с. 5—8.
6. Kenmotsu K. Surfaces with constant mean curvature. — In: Translations of Mathematical Monographs, vol. 221. — Providence: American Mathematical Society, 2003.
7. Сковорода А.А., Тайманов И.А. О значении средней кривизны в геометрии магнитного поля ловушек для удержания плазмы. — Физика плазмы, 2010, т. 36, с. 874—878.
8. Khayrutdinov R.R., Lukash V.E. Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique. — J. Comput. Phys., 1993, vol. 109, p. 193—201.
9. Hirshman S.P., Betancourt O. Preconditioned descent algorithm for rapid calculations of magnetohydrodynamic equilibria. — J. Comput. Phys., 1991, vol. 96, p. 99—109.
10. Nuehrenberg J., Zille R. Theory of Fusion Plasmas. — In: Proc. of the Workshop on Theory of Fusion Plasmas. Varenna, 1987, vol. EUR 11336 EN. — Bologna: Editrice Compositori, 1988, p. 3—23.
11. JT-60 Team. Recent experiments in JT-60. Plasma physics and controlled nuclear fusion research. — In: Proc. of the Eleventh Intern. Conf. on Plasma Physics. Kyoto, 1986, vol. 1. — Vienna: IAEA, 1987, p. 11—30.



Виктор Игоревич Ильгисонис, зам. директора по научной работе – главный учёный секретарь, д.ф.-м.н., профессор; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия



Александр Алексеевич Сковорода, г.н.с., д.ф.-м.н., ветеран атомной энергетики и промышленности; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия  
Skovoroda\_AA@nrc.ki.ru



Екатерина Алексеевна Сорокина, с.н.с., к.ф.-м.н.; НИЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1, Россия

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2015 г.  
Вопросы атомной науки и техники.  
Сер. Термоядерный синтез, 2016, т. 39, вып. 1, с. 22—29.