

УДК 621.039.623

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОД SPIDER. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ И ЭВОЛЮЦИИ ПЛАЗМЫ ТОКАМАКА

*А.А. Иванов<sup>1</sup>, А.А. Мартынов<sup>1</sup>, С.Ю. Медведев<sup>1</sup>, Ю.Ю. Пошехонов<sup>1</sup>, С.В. Коновалов<sup>2</sup>, Р.Р. Хайрутдинов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия*

Эффективный расчёт условий равновесия осесимметричной плазмы произвольной формы и с произвольным распределением давления и плотности тока по радиусу является одной из первоочередных задач теоретических исследований в проблеме УТС. Данная статья посвящена описанию многомодульного вычислительного кода SPIDER, предназначенного для численного моделирования равновесия и эволюции плазмы токамака в различных вариантах постановки соответствующих задач. Разработанные методы решения прямой и обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей позволяют точно определять положение плазмы и токи в катушках полоидального поля в токамаках. Численный расчёт квазиравновесной эволюции плазмы с учётом диффузии магнитного поля и вихревых токов в проводящих структурах может быть использован для моделирования управления положением плазмы и расчёта её динамики во время срыва тока и развития периферийных локализованных неустойчивостей (ELM). Код может быть также применён для моделирования влияния анизотропии давления и вращения на равновесие плазмы.

**Ключевые слова:** токамак, плазма, МГД-равновесие, эволюция.

## THE SPIDER CODE. MATHEMATICAL MODELING OF TOKAMAK PLASMA EQUILIBRIUM AND EVOLUTION

*A.A. Ivanov<sup>1</sup>, A.A. Martynov<sup>1</sup>, S.Yu. Medvedev<sup>1</sup>, Yu.Yu. Poshekhonov<sup>1</sup>, S.V. Konovalov<sup>2</sup>, R.R. Khayrutdinov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia*

The reliable computation of equilibrium conditions for axisymmetric plasma of arbitrary shape and with arbitrary distribution of pressure and current density along the radius is one of the first priority tasks among the theoretical problems on the way to controlled thermonuclear fusion. This paper describes the multi-module SPIDER code as an axisymmetric multipurpose solver for various formulations of the tokamak plasma equilibrium and evolution problems. The developed solution techniques for direct and inverse problems of free boundary plasma equilibrium make it possible to accurately determine plasma position and currents in the tokamak poloidal field coils. The numerical simulation of quasi equilibrium tokamak plasma evolution, taking into account the magnetic field diffusion in resistive plasma and eddy currents in poloidal field coils and passive conductors, can be used for plasma position control modeling and estimation of plasma dynamics under current disruptions and development of edge-localized modes (ELM). The code can be also used for modeling of pressure anisotropy and rotation effects on the equilibrium.

**Key words:** tokamak, plasma, MHD equilibrium, evolution.

### ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени наиболее значимые результаты в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС) достигнуты на установках с магнитным удержанием плазмы типа токамак. Во Франции (Кадараш) ведутся работы по реализации международного проекта термоядерной экспериментальной установки ИТЭР для решения научных и технологических проблем на пути к коммерческому использованию токамаков в качестве реакторов.

Общепризнано, что моделирование, включающее построение адекватных математических моделей, разработку эффективных численных методов и комплексов программ, необходимо при разработке проектов, для оптимизации параметров разряда и достижения максимальных параметров плазмы. Разработанные к настоящему времени математические модели плазмы и обширная база экспериментальных данных позволяют проводить вычислительные эксперименты уже на стадии проектирования.

С точки зрения реакторных перспектив основными проблемами являются получение и удержание тороидального плазменного шнура оптимальной формы и с оптимальным распределением плазменных параметров. Эффективный расчёт условий равновесия осесимметричной плазмы произвольной формы и с произвольным распределением по радиусу давления и плотности тока является одной из первоочередных задач теоретических исследований в проблеме УТС [1—8].

Множество постановок задачи расчёта равновесия плазмы токамака [9] делится на два неравнозначных класса: задачи внутри заданной фиксированной границы плазмы и более приближенные к потребностям эксперимента задачи равновесия в неограниченной области с неизвестной свободной границей плазмы во внешних тороидальных токах. Данная статья посвящена описанию многомодульного вычислительного кода SPIDER, предназначенного для численного моделирования равновесия и эволюции плазмы токамака в различных вариантах постановки соответствующих задач.

Первая часть статьи посвящена описанию модуля [10], предназначенного для нахождения осесимметричного равновесия плазмы с заданной фиксированной границей методом адаптивных к искомому магнитным поверхностям сеток [11—14]. Предполагается, что плазма ограничена заданной крайней магнитной поверхностью и обладает вложенными магнитными поверхностями с единственной магнитной осью. Равновесие плазмы в этой области описывается известным двумерным нелинейным уравнением Грэда—Шафранова [1, 2], дополненным соответствующими краевыми условиями. В качестве входных параметров задачи могут быть заданы любые две из традиционно задаваемых потоковых функций, определяющих явно или опосредованно распределение плотности тороидального тока. Широкая область применения, высокая скорость и точность этого модуля делают его ключевым инструментом для решения сложных задач расчёта равновесия тороидальной плазмы. Среди них равновесие с высокими значениями  $\beta$ , с большой вытянутостью границы плазмы, с малым аспектным отношением, с большим смещением магнитной оси, при задании границы плазмы с X-точкой (диверторной плазмы), для профилей плотности тороидального тока с обращённым широм, в случае ненулевого тороидального компонента плотности тока на границе плазмы и другие.

Вторая часть статьи представляет модуль [15] для решения прямой задачи осесимметричного равновесия плазмы с неизвестной свободной границей в предписанных внешних тороидальных токах. В этом случае равновесие плазмы также описывается уравнением Грэда—Шафранова, но в неограниченной области с априори неизвестными положением и границей плазмы [9]. При этом в уравнение добавлены члены, отвечающие за вклад в формирование равновесия внешних удерживающих токов в катушках полоидального поля. Положение и форма катушек, а также величины токов в них, являются входными параметрами задачи. В коде SPIDER эта задача может быть решена как на традиционной фиксированной прямоугольной сетке, так и на априори неизвестной адаптивной к магнитным поверхностям (линиям уровня решения) потоковой сетке, что позволяет в ряде случаев решать задачи, которые практически неразрешимы на фиксированных прямоугольных сетках. Некоторые коды, в которых в качестве необходимой составной части решается прямая задача равновесия плазмы со свободной границей: DINA [16], TSC [17], CORSICA [18], JETTO [19], SCED [20] и MAXFEA [21].

Третья часть статьи посвящена формулировке и методу решения (реализованным в соответствующем модуле кода SPIDER [15]) обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей как задачи восстановления удерживающих токов в предписанных катушках полоидального поля по заданному в определённом формате равновесию. Этот формат может включать в себя положение X-точек и усов сепаратрисы. В частности, посредством соответствующего модуля может быть решена обратная задача восстановления токов для случая равновесия с X-точкой второго порядка — так называемого равновесия «snowflake» [22]. Некоторые обратные задачи равновесия решаются в кодах EFIT [23], LIUQE [24], CLISTE [25].

Описание модуля [26], предназначенного для решения задачи квазиравновесной эволюции плазмы токамака с учётом диффузии магнитного поля и наведённых вихревых токов в катушках полоидального поля и окружающих плазму пассивных проводящих структурах, содержится в четвертой части статьи. Квазиравновесные эволюционные коды устроены таким образом, что на каждом временном шаге решается двумерная задача равновесия совместно с одномерными транспортными уравнениями, уравнением диффузии магнитного поля и уравнением цепей для наведённых вихревых токов. Исторически первые коды такого рода использовали модули равновесия с предписанной границей плазмы. Однако для самосогласованного (учитывающего изменение формы плазмы) расчёта эволюции на каждом временном шаге необходимо решать задачу равновесия плазмы с неизвестной свободной границей во внешних магнитных полях, изменяющихся за счёт эволюции токов и напряжений в обмотках управляющих катушек полоидального поля, в вакуумной камере и проводниках пассивной стабилизации. Эволюционные коды

DINA [16], PET [27], CORSICA [18], TSC [17], к числу которых относится и соответствующий модуль кода SPIDER, в настоящее время широко используются для моделирования сценариев плазмы в существующих и проектируемых токамаках. При решении ряда задач эволюции плазмы токамака, например, когда локальная величина плотности тока превышает на порядки его среднее значение или при сильном изменении размера плазмы, код SPIDER за счёт применения адаптивных к магнитным поверхностям сеток может иметь решающее преимущество по скорости и точности расчёта перед упомянутыми кодами, основанными на традиционном методе решения задачи равновесия на фиксированной прямоугольной сетке.

Каждая часть статьи иллюстрирована примерами расчётов, характерными с точки зрения демонстрации возможностей кода.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Общая задача МГД-равновесия плазмы представлена стандартной системой векторных уравнений магнитостатики

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{j} \times \mathbf{B}; \\ \mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B}; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

где  $p$  — газокINETическое изотропное давление плазмы;  $\mathbf{B}$  — вектор магнитного поля;  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока плазмы;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума. В случае осесимметричной равновесной конфигурации эта система может быть сведена к скалярному квазилинейному двумерному дифференциальному уравнению Грэда—Шафранова [1, 2] относительно функции полоидального магнитного потока  $\psi$

$$\Delta^* \psi(r, z) = -r \mu_0 j_\phi(r, \psi), \quad (r, z) \in \Omega_p, \quad (1)$$

где оператор  $\Delta^*$  определяется следующим образом:

$$\Delta^* \psi = r^2 \nabla \cdot \left( \frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Модуль вычислительного кода SPIDER, предназначенный для численного решения задачи равновесия с заданной фиксированной границей  $\partial\Omega_p$ , решает в области  $\Omega_p$  это уравнение, дополненное приводимыми далее краевыми условиями. Здесь  $(r, \phi, z)$  — цилиндрическая система координат, связанная с осью симметрии плазменной конфигурации;  $\Omega_p$  — область плазмы в плоскости  $(r, z)$ ;  $\psi(r, z)$  — полоидальный магнитный поток, разделённый на  $2\pi$ ;  $j_\phi(r, z)$  — плотность тороидального тока плазмы;

$$\mu_0 j_\phi = r \mu_0 \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{r} f \frac{df}{d\psi}; \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \phi + f \nabla \phi;$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla f \times \nabla \phi + r j_\phi \nabla \phi;$$

$$\psi = r A_\phi = \Psi/2\pi; \quad f = r B_\phi = \mu_0 J_{\text{pol}}/2\pi,$$

где  $p(\psi)$  — профиль давления плазмы;  $A_\phi$  — тороидальный компонент векторного потенциала магнитного поля;  $B_\phi$  — тороидальный компонент магнитного поля;  $\Psi$  — полоидальный магнитный поток, измеряемый от оси симметрии  $r = 0$ ;  $J_{\text{pol}}$  — полоидальный ток плазмы, измеряемый от оси симметрии  $r = 0$ ;

$$\Psi(r, z) = \int_{S_{\text{pol}}} (\mathbf{B}, \mathbf{n}) dS; \quad J_{\text{pol}}(r, z) = \int_{S_{\text{pol}}} (\mathbf{j}, \mathbf{n}) dS,$$

где  $S_{\text{pol}}$  — полоидальная поверхность, ограниченная проходящей в тороидальном направлении через точку  $(r, z)$  круговой линией.

Предполагая существование в плазме вложенных магнитных поверхностей с единственной магнитной осью, мы можем определить тороидальный поток магнитного поля  $\Phi(\psi)$  и тороидальный ток плазмы внутри магнитной поверхности  $J_{\text{tor}}(\psi)$ :

$$\Phi(\psi) = \int_{S_{\text{tor}}(\psi)} (\mathbf{B}, \mathbf{n}) dS = \int_{S_{\text{tor}}(\psi)} f(\psi) \frac{drdz}{r};$$

$$J_{\text{tor}}(\psi) = \int_{S_{\text{tor}}(\psi)} (\mathbf{j}, \mathbf{n}) dS = \int_{S_{\text{tor}}(\psi)} j_{\phi}(r, \psi) drdz,$$

где  $S_{\text{tor}}(\psi)$  — поперечное сечение плоскостью  $\phi = \text{const}$  тороидальных магнитных поверхностей  $\psi(r, z) = \text{const}$ . В случае граничной магнитной поверхности  $S_{\text{tor}}(\psi) \equiv \Omega_p$ . В дальнейшем под термином «поток» понимается поток магнитного поля.

В коде SPIDER используется следующее краевое условие на границе плазмы:

$$\psi(r, z) = \psi_{\text{bound}}; (r, z) \in \partial\Omega_p, \quad (3)$$

причём в случае фиксированной границы можно полагать  $\psi_{\text{bound}} = 0$ .

Предполагается, что граница плазмы  $\partial\Omega_p$  задана. В коде имеются две возможности задания этой границы:

— посредством аналитических формул

$$r_b = r_0 + \frac{r_0}{A} \cos(\theta + \delta \sin\theta); z_b = z_0 + \frac{r_0}{A} k \sin\theta, \quad (4)$$

где  $r_0, z_0$  — координаты геометрического центра границы плазмы;  $\theta$  — полоидальный угол в плоскости  $(r, z)$ ;  $A$  — аспектное отношение границы плазмы;  $k$  — вытянутость;  $\delta$  — треугольность границы:

$$\delta = 0,5[\delta_u + \delta_l + (\delta_u - \delta_l)\sin\theta],$$

$$k = 0,5[k_u + k_l + (k_u - k_l)\sin\theta], \quad (5)$$

где  $k_u, k_l$  — верхняя и нижняя вытянутость границы соответственно;  $\delta_u, \delta_l$  — верхняя и нижняя треугольность границы плазмы. Для задания границы возможно использование и других аналитических формул;

— посредством заданных массивов координат точек, аппроксимирующих границу:  $r_b(i), z_b(i)$ ,  $i = 1, \dots, N_b$ .

В коде SPIDER реализованы следующие постановки задачи осесимметричного равновесия плазмы с заданной границей.

I. Постановка с заданной плотностью тороидального тока плазмы  $j_{\phi}(r, z)$  — правой частью (2) уравнения Грэда—Шафранова (1) и значением полного тороидального тока плазмы, т.е. с заданными профилями  $p'_{\psi}(\bar{\psi}), ff'_{\psi}(\bar{\psi})$  (где штрих обозначает производную по  $\psi$ ) в виде функций нормированного полоидального магнитного потока  $\bar{\psi} = (\psi - \psi_{\text{axis}})/(\psi_{\text{bound}} - \psi_{\text{axis}}) \in [0, 1]$  и значением полного тороидального тока плазмы

$$J_{\text{pl}} = \int_{\Omega_p} j_{\phi} drdz. \quad (6)$$

Реализованы две возможности задания профилей  $p'_{\psi}(\bar{\psi}), ff'_{\psi}(\bar{\psi})$ :

— посредством аналитических формул, например:

$$p'_{\psi} = \alpha_0(1 - \bar{\psi}^{\alpha_1})^{\alpha_2}; ff'_{\psi} = \beta_0(1 - \bar{\psi}^{\beta_1})^{\beta_2}; \quad (7)$$

— посредством заданных массивов:  $\bar{\psi}_i, p'_{\psi}(\bar{\psi}_i), ff'_{\psi}(\bar{\psi}_i), i = 1, \dots, N_{\text{pf}}$ .

II. Постановка с заданными профилями давления  $p'_{\psi}(\bar{\psi})$  и фактора запаса устойчивости  $q(\bar{\psi}) = -d\Phi/d\psi$  в виде функций нормированного полоидального потока  $\bar{\psi}$ , с предписанным значением перепада полоидального потока в плазме  $(\psi_{\text{axis}} - \psi_{\text{bound}})$ . Внутри плазмы функция полоидального тока  $f(\psi)$  связана с фактором запаса устойчивости  $q(\psi)$  соотношением

$$f(\psi) = 2\pi q(\psi) / \int_{\psi=\text{const}} \frac{dl}{r|\nabla\psi|},$$

где интеграл берётся вдоль линии пересечения тороидальной магнитной поверхности  $\psi(r, z) = \text{const}$  и координатной плоскости  $\varphi = \text{const}$ , определяющей поперечное сечение плазменного шнура.

III. Постановка с заданными профилями давления  $p'_\psi(\bar{\psi})$  и усреднённой плотности тороидального тока  $\langle j_\varphi \rangle_V(\bar{\psi})$  в виде функций нормированного полоидального потока  $\bar{\psi}$ . Здесь усреднение определяется как  $\langle \cdot \rangle_V = \frac{d}{dV} \int_{V(\psi)} dV$ , где  $V(\psi)$  — объём внутри магнитной поверхности  $\psi = \text{const}$ . Профили  $q$  и  $\langle j_\varphi \rangle_V$  в этих постановках обычно задаются таблично.

Во всех рассмотренных постановках задачи равновесия за счёт соответствующей нормировки заданного профиля  $p'_\psi(\bar{\psi})$  можно задать в качестве входного параметра значение полоидального бета:

$$\beta_p = 8\pi \int_{\Omega_p} p dS / \mu_0 J_{pl}^2.$$

Приведём результаты трёх расчётов, демонстрирующие диапазон возможностей кода SPIDER по расчёту равновесных конфигураций плазмы с заданной границей. Успех расчётов во многом обеспечен применением метода адаптивных сеток, который в данном случае состоит в построении сетки, кольцевые координатные линии которой в точности совпадают с линиями уровня искомого решения  $\psi(r, z)$ . На всех представленных двумерных рисунках цвет соответствует линиям уровня функции  $\psi(r, z)$ , изменяющейся от минимального (темно-синий) до максимального значения (темно-красный) на магнитной оси.

Первый расчёт соответствует большому значению полоидального бета  $\beta_p \approx 4$  для круговой границы плазмы. Найденная равновесная конфигурация показана на рис. 1. Видно, как сильно смещается магнитная ось плазмы от геометрического центра и как деформируются магнитные поверхности в её окрестности. Во втором случае рассчитана равновесная конфигурация с очень большой вытянутостью границы плазмы,  $k = 6$ . Этот случай демонстрирует возможности кода по расчёту весьма экзотических конфигураций. Соответствующее решение представлено на рис. 2. В качестве третьего примера выбрана граница

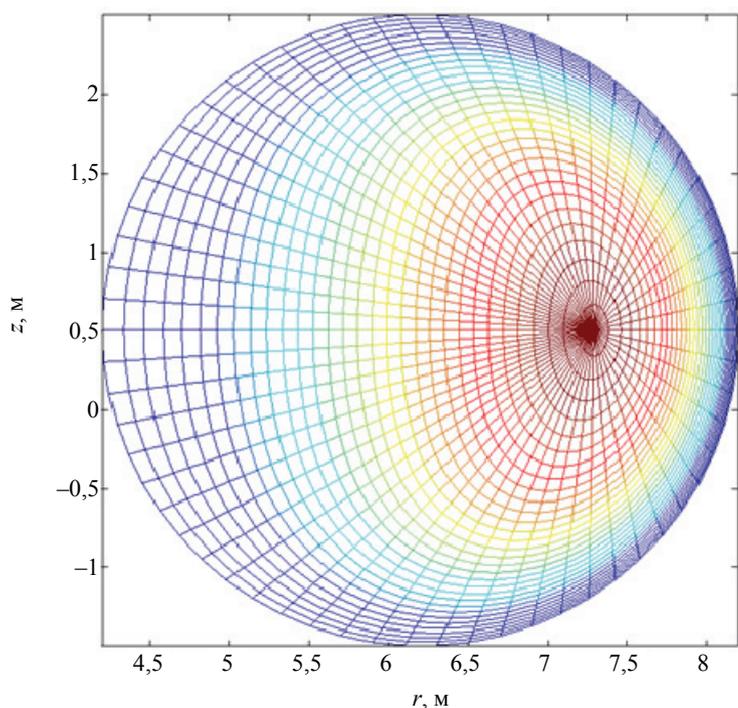


Рис. 1. Адаптивная к магнитным поверхностям  $\psi(r, z) = \text{const}$  сетка. Полоидальное  $\beta_p \approx 4$ . Цвет соответствует линиям уровня функции  $\psi(r, z)$

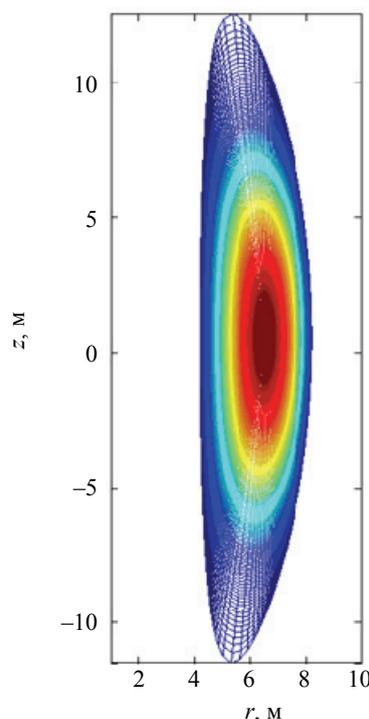


Рис. 2. Адаптивная к магнитным поверхностям сетка. Вытянутость плазмы  $k = 6$ . Цвет соответствует линиям уровня функции  $\psi(r, z)$

плазмы с X-точкой. Этот пример показывает, что код может быть использован для моделирования реальных экспериментов в токамаке с диверторной плазмой. Результаты этого расчёта представлены на рис. 3, 4.

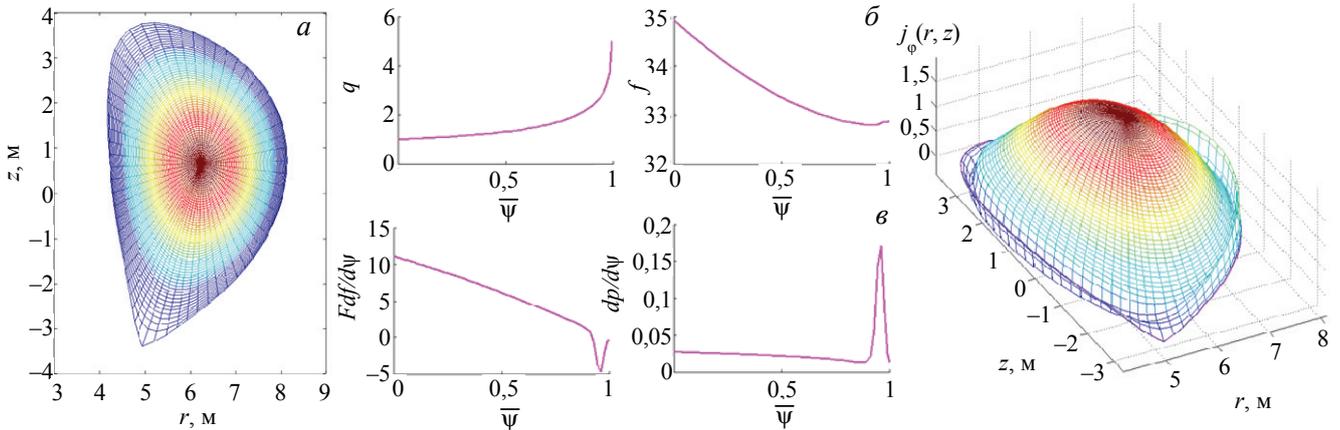


Рис. 3. Диверторная плазма: адаптивная к магнитным поверхностям  $\psi(r, z) = \text{const}$  сетка (а); зависимость  $q$  и  $f$ , соответствующих равновесной конфигурации (б), и немонотонных профилей тороидального компонента плотности тока плазмы  $fdf/d\psi$  и  $dp/d\psi$  (в) от нормированного полоидального магнитного потока

Рис. 4. Трёхмерный график плотности тороидального тока  $j_\phi(r, z)$  диверторной плазмы на рис. 3, а. Цвет соответствует линиям уровня функции  $j_\phi(r, z)$

### РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Осесимметричное равновесие плазмы со свободной границей в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$  описывается уравнением равновесия Грэда—Шафранова (1) с дополнительным членом в правой части

$$\Delta^* \psi(r, z) = -r\mu_0 j_\phi(r, \psi) - r\mu_0 \sum_k J_k \delta(r - r_k, z - z_k) \quad (8)$$

в неограниченной области на плоскости  $(r, z)$ . При этом граница  $\partial\Omega_p$  области  $\Omega_p$ , занимаемой плазмой, и значение  $\psi = \psi_{\text{bound}}$  на этой границе неизвестны. Тороидальный компонент плотности тока плазмы  $j_\phi(r, \psi)$  внутри  $\partial\Omega_p$  определяется согласно (2), а вне  $\partial\Omega_p$  полагается равным нулю. Задаются также профили  $p'_\psi(\bar{\psi})$ ,  $ff'_\psi(\bar{\psi})$  как функции нормированного полоидального потока  $\bar{\psi}$  и значение полного тороидального тока плазмы  $J_{\text{pl}}$  (6).

Геометрия тороидального сечения катушек с токами, формирующими полоидальное магнитное поле, и пассивных проводящих структур, окружающих плазму, также полагается заданной. Она аппроксимируется конечным набором тонких кольцевых проводников — филаментов. Известные координаты последних  $(r_k, z_k)$  и токи  $J_k$  в каждом из них входят в правую часть (8), где  $\delta(r, z)$  — дельта-функция Дирака.

Уравнение (8) дополняется также следующими краевыми условиями:

$$\psi|_{r \rightarrow 0} = 0; \psi|_{r^2 + z^2 \rightarrow \infty} = 0; \psi|_{\partial\Omega_p} = \psi_{\text{bound}} = \text{const}, \quad (9)$$

где  $\psi_{\text{bound}}$  (значение на неизвестной границе плазмы) определяется через  $\psi_{\text{axis}}$  (значение на неизвестной магнитной оси плазмы) и  $\psi_{\text{separ}}$  (значение на неизвестной сепаратрисе плазмы) из условия

$$\alpha = \frac{\psi_{\text{bound}} - \psi_{\text{axis}}}{\psi_{\text{separ}} - \psi_{\text{axis}}} = \text{const}, \alpha \in (0, 1], \quad (10)$$

где  $\alpha$  — входной параметр задачи, определяющий близость границы плазмы к сепаратрисе. Случай  $\alpha = 1$  соответствует совпадению границы плазмы с сепаратрисой. Как альтернатива, значение  $\psi_{\text{bound}}$  может определяться значением решения в некоторой предписанной точке области  $\Omega_p$  — так называемой лимитерной точке. Значение  $\psi_{\text{axis}}$  определяется из условия  $|\nabla\psi| = 0$  внутри  $\Omega_p$ .

Предполагается, что область плазмы обладает единственной магнитной осью и стягивающимися к ней вложенными магнитными поверхностями.

Неограниченность области, в которой решается поставленная нелинейная эллиптическая задача равновесия со свободной границей, создаёт дополнительные трудности с точки зрения численной реализации. Для их преодоления применяется предложенная в [28] процедура Лакнера — алгоритм сведения задачи в неограниченной области к нескольким задачам в ограниченной области. Подробное описание этого метода применительно к решению эллиптических краевых задач с неизвестной свободной границей на плоскости можно найти в [29—31]. Приведём здесь общую схему процедуры Лакнера:

— фундаментальное решение (функция Грина)  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  для оператора  $\Delta^*$  определяется как решение уравнения

$$\Delta^* G = -r\mu_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (11)$$

в неограниченной области,  $\delta(r, z)$  — дельта-функция Дирака;

— уравнение равновесия со свободной границей (8) можно разбить на два уравнения:

$$\Delta^* \psi_p = -r\mu_0 j_\varphi; \quad (12a)$$

$$\Delta^* \psi_{\text{ext}} = -r\mu_0 \sum_k J_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (12b)$$

при этом по определению и свойствам функции Грина получаем:

$$\psi_p(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega_p} j(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS; \quad (13a)$$

$$\psi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0) = \sum_k G(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_0) J_k; \quad (13b)$$

— для любых двух функций  $u, v$  справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int_S \frac{1}{r} (u\Delta^* v - v\Delta^* u) dS = \int_{\partial S} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dl - \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial n} dl \right). \quad (14)$$

Окружим область  $\Omega_p$ , занимаемую плазмой, внешней по отношению к ней замкнутой кривой  $\partial S$  достаточной степени гладкости. Рассмотрим в области  $S$  задачу

$$\Delta^* g = -rj_\varphi; \quad g|_{\partial S} = 0 \quad (15)$$

и положим в (14)  $v \equiv G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ ,  $u \equiv g$ . Тогда

$$\int_S \frac{1}{r} (g\Delta^* G - G\Delta^* g) dS = \int_{\partial S} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial g}{\partial n} dl - \frac{g}{r} \frac{\partial G}{\partial n} dl \right);$$

$$\lambda\mu_0 g(\mathbf{r}_0) - \int_S j_\varphi G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS = \int_{\partial S} \frac{G}{r} \frac{\partial g}{\partial n} dl, \quad \text{где}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_0 \in S, \\ 1/2, & \mathbf{r}_0 \in \partial S, \\ 0, & \mathbf{r}_0 \notin S. \end{cases} \quad (16)$$

Положим в (16)  $\mathbf{r}_0 \in \partial S$ . Тогда  $-\int_S j_\varphi G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS = \int_{\partial S} \frac{G}{r} \frac{\partial g}{\partial n} dl$ , где согласно (13a)  $\int_S j_\varphi G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS = \psi_p(\mathbf{r}_0)$ , и мы получаем краевое условие для  $\psi = \psi_p + \psi_{\text{ext}}$  на границе  $\partial S$ :

$$\psi_p(\mathbf{r}_0) = - \int_{\partial S} \frac{G}{r} \frac{\partial g}{\partial n} dl; \quad \psi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0) = \sum_k G(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_0) J_k. \quad (17)$$

Здесь  $g$  — решение краевой задачи (15).

Таким образом, решение исходной задачи в неограниченной области сводится к решению задачи (15) с однородным граничным условием и задачи (12a) с краевым условием (17) в ограниченной области.

В коде SPIDER прямая задача равновесия со свободной границей может решаться как на фиксированной прямоугольной сетке, так и на радиально-кольцевой потоковой сетке, адаптивной внутри плазмы к магнитным поверхностям.

При расчёте равновесия со свободной границей на прямоугольной сетке задача решается в прямоугольнике, размеры которого выбираются так, что плазма заведомо находится внутри него. На рис. 5, *a* представлен пример расчёта равновесной конфигурации токамака ИТЭР, определяемой следующими входными параметрами задачи:

- профилями тороидального компонента плотности тока плазмы  $fdf/d\psi$  и  $dp/d\psi$  в виде функций нормированного полоидального потока (см. рис. 5, *в*);
- значением полного тороидального тока плазмы  $J_{pl} = 15$  МА;
- параметром  $\alpha = 0,995$ , задающим близость границы плазмы к сепаратрисе;
- заданными токами в катушках полоидального поля, расположение которых показано на рис. 5, *a*.

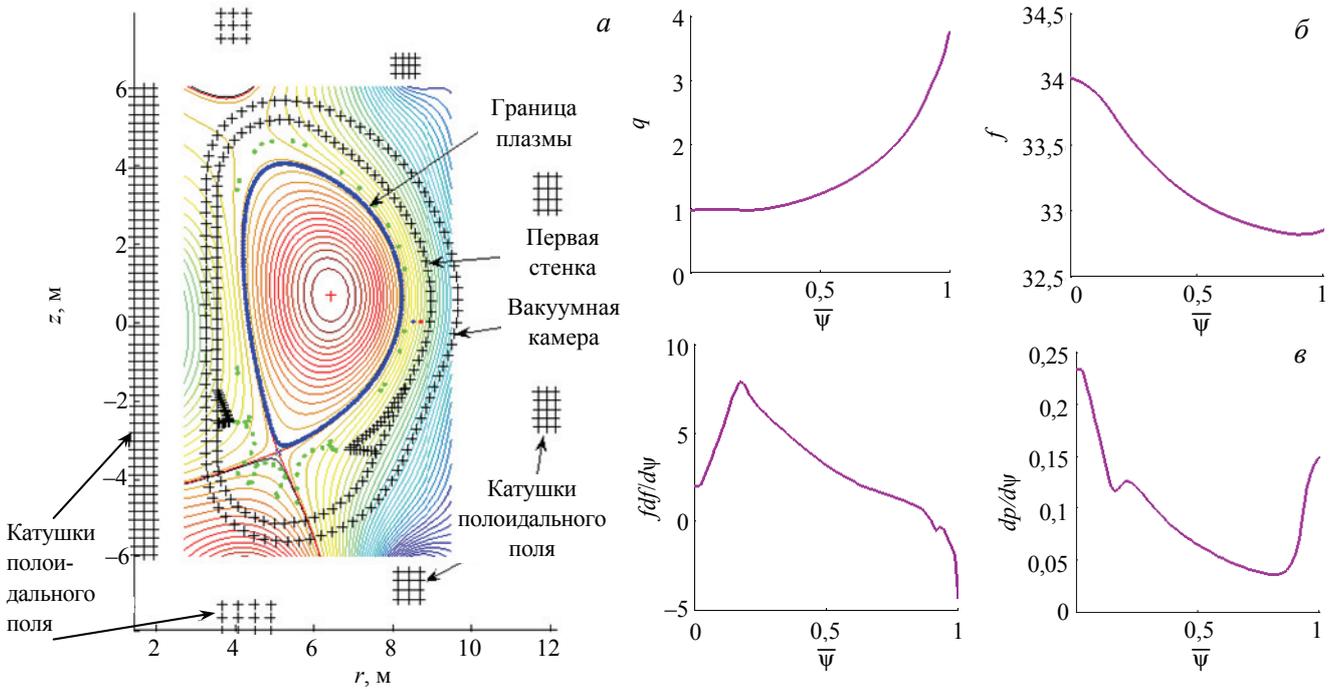


Рис. 5. Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке: конфигурация токамака ИТЭР (*a*); зависимость  $q$  и  $f$ , соответствующих равновесной конфигурации (*б*), и профилей тороидального компонента плотности тока плазмы  $fdf/d\psi$  и  $dp/d\psi$  (*в*) от нормированного полоидального магнитного потока

При расчёте равновесия со свободной границей на сетке, адаптивной к магнитным поверхностям, в качестве расчётной области выбирается область, охватывающую плазму и геометрически подобная области, занимаемой плазмой. В расчётной области строится сетка, топологически эквивалентная радиально-кольцевой сетке в круге. В области, занимаемой плазмой, сетка в процессе расчёта адаптируется к магнитным поверхностям на каждом итерационном шаге. Конечным итогом данного итерационного процесса является построение радиально-кольцевой сетки, кольцевые координатные линии которой совпадают с линиями уровня искомого решения. На рис. 6 представлен пример расчёта на адаптивной сетке той же равновесной конфигурации токамака ИТЭР, что и на рис. 5, *a*.

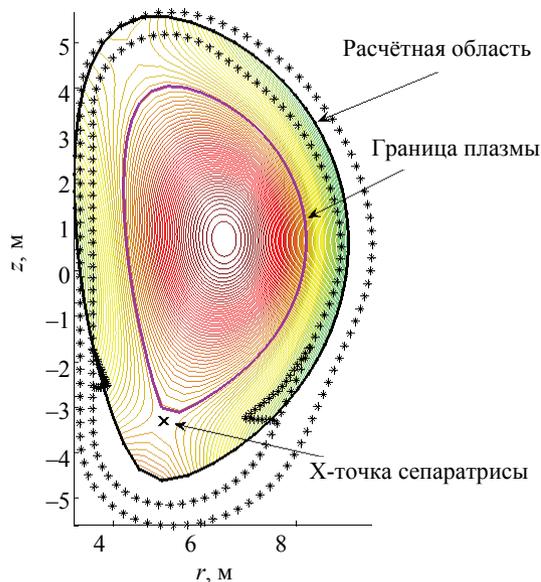


Рис. 6. Равновесие плазмы со свободной границей на адаптивной к магнитным поверхностям  $\psi(r, z) = \text{const}$  сетке. Конфигурация токамака ИТЭР, аналогичная рис. 5, *a*. Цветом показаны линии уровня функции  $\psi(r, z)$

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Обратная задача равновесия осесимметричной плазмы со свободной границей — нахождения токов в обмотках катушек полоидального поля, формирующих требуемое равновесие плазмы, формулируется следующим образом.

1. Положение и форма требуемой границы равновесной плазмы аппроксимируются конечным набором точек на плоскости  $(r, z)$ . Их координаты  $(r_l, z_l)$  полагаются заданными. Это так называемые «фиттинговые» точки, к которым определяемая в процессе итераций граница равновесной плазмы будет подстраиваться наилучшим образом в смысле минимизации приводимого далее функционала.

2. Задаются координаты нескольких «контрольных» точек  $(r_m, z_m)$ , через которые граница плазмы должна пройти точно.

3. Задаются опорные значения (приближения) токов  $J_k^{\text{ref}}$  в катушках полоидального поля, от которых, по возможности, не должны сильно отличаться искомые токи.

4. Задаются координаты  $(r_x, z_x)$  седловой точки, где  $|\nabla\psi| = 0$ . С ними должны совпадать координаты X-точки найденного равновесия со свободной границей.

5. Задаются определяющие равновесие профили в плазме, как функции  $\bar{\Psi}$ , а также нормировочные константы:

—  $p'_\psi(\bar{\Psi})$ ,  $ff'_\psi(\bar{\Psi})$  и значение полного тороидального тока плазмы  $J_{p1}$ , значение вакуумного тороидального магнитного поля  $B_0$  для заданного значения координаты  $r = r_0$ , либо

—  $p'_\psi(\bar{\Psi})$ ,  $q(\bar{\Psi})$ , и либо значение полного тороидального тока плазмы  $J_{p1}$ , либо значение полоидального потока, захваченного плазмой  $(\psi_{\text{axis}} - \psi_{\text{bound}})$ .

6. Для искомого равновесия плазмы со свободной границей задаётся значение параметра  $\alpha$  (10).

Требуется найти значения токов в заданных катушках полоидального магнитного поля, которые формируют равновесную конфигурацию плазмы со свободной границей, удовлетворяющую перечисленным условиям.

Задача определения токов  $J_k$  в катушках полоидального магнитного поля, необходимых для формирования равновесной конфигурации плазмы с границей, проходящей близко к фиттинговым точкам  $(r_p, z_l)$ , может быть сформулирована как задача минимизации функционала  $\min_{J_k, \psi_{\text{bound}}} W$ , где

$$W = \sum_{l=1}^L \omega_l \left[ \psi_p(r_l, z_l) + \sum_{k=1}^K J_k G(r_l, z_l; r_k, z_k) - \psi_{\text{bound}} \right]^2 + \sigma \sum_{k=1}^K d_k (J_k - J_k^{\text{ref}})^2, \quad (18)$$

по отношению к вариациям величин токов  $J_k$  и величины полоидального потока  $\psi = \psi_{\text{bound}}$  на границе плазмы. Значение величины  $\sigma > 0$  обеспечивает регуляризацию решения задачи. Коэффициенты  $\omega_l$  и  $d_k$  задаются и служат для корректировки значений потоков в каждой конкретной фиттинговой точке и отклонения равновесных токов в катушках полоидального поля от предписанных опорных значений. Через  $\psi_p(r_p, z_l)$  обозначено значение полоидального потока, создаваемого током плазмы в фиттинговой точке  $(r_p, z_l)$ .

Кроме приближенных граничных точек  $(r_p, z_l)$ , могут также задаваться «контрольные» граничные точки  $(r_m, z_m)$ , через которые граница плазмы должна проходить точно. Это делается с использованием Лагранжевых множителей  $\lambda_m$  и приведением функционала к виду  $\min_{J_k, \psi_{\text{bound}}, \lambda_m} (W + W')$ , где

$$W' = \sum_{m=1}^M \lambda_m \left[ \psi_p(r_m, z_m) + \sum_{k=1}^K J_k G(r_m, z_m; r_k, z_k) - \psi_{\text{bound}} \right]. \quad (19)$$

За счёт дополнительных слагаемых с множителями Лагранжа  $\lambda_{R_x}, \lambda_{Z_x}, \lambda_x$  точно выполняются условия пунктов 4, 6 при использовании функционала  $\min_{J_k, \Psi_{\text{bound}}, \lambda_m, \lambda_{R_x}, \lambda_{Z_x}, \lambda_x} (W + W' + W'')$ , где

$$W'' = \lambda_{R_x} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_p}{\partial r} \right)_x + \sum_k J_k \frac{\partial G(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_k)}{\partial r_x} \right] + \lambda_{Z_x} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_p}{\partial z} \right)_x + \sum_k J_k \frac{\partial G(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_k)}{\partial z_x} \right] + \lambda_x \left[ (\Psi_{\text{axis}} - \Psi_{\text{bound}}) - \alpha (\Psi_{\text{axis}} - \Psi_{\text{separ}}) \right]. \quad (20)$$

Минимизацией функционала  $\min_{J_k, \Psi_{\text{bound}}, \lambda_m, \lambda_{R_x}, \lambda_{Z_x}, \lambda_x, \lambda_{R_z}, \lambda_{Z_z}} (W + W' + W'' + W''')$  с дополнительным членом

$$W''' = \lambda_{R_z} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial r \partial z} \right)_x + \sum_{k=1}^K J_k \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_k)}{\partial r \partial z} \right] + \lambda_{Z_z} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2} \right)_x + \sum_{k=1}^K J_k \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_k)}{\partial z^2} \right] \quad (21)$$

решается обратная задача в случае равновесия с X-точкой второго порядка — так называемого равновесия «snowflake» [22], где обычные условия для X-точки дополнены требованием равенства нулю всех вторых производных от решения  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = 0. \quad (22)$$

На рис. 7, а представлен пример равновесной конфигурации токамака ИТЭР, определяемой реконструированными в результате решения соответствующей обратной задачи токами. Входными параметрами обратной задачи, помимо заданных координат «фиттинговых» и «контрольных» точек, являлись:

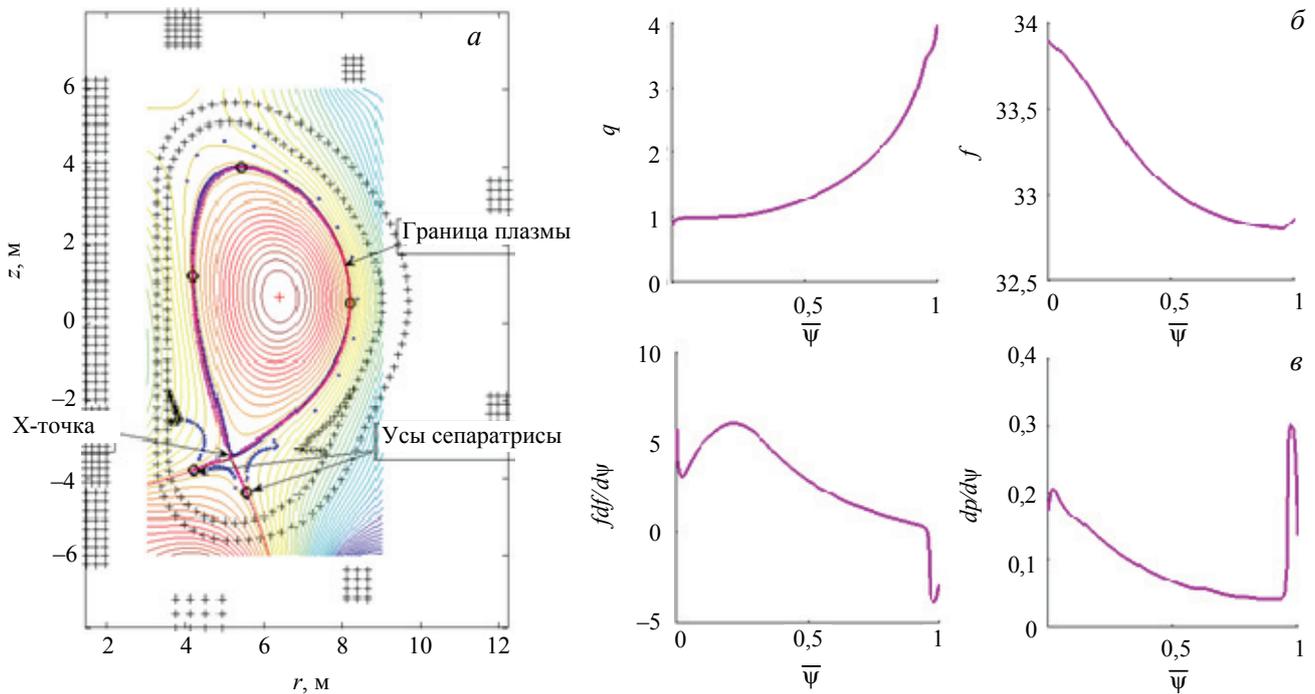


Рис. 7. Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке в реконструированных токах (конфигурация токамака ИТЭР): «контрольные» точки (о) — три на границе плазмы, две на усах сепаратрисы (а); зависимость  $q$  и  $f$ , соответствующих равновесной конфигурации (б), и профилей тороидального компонента плотности тока плазмы  $fdf/d\psi$  и  $dp/d\psi$  (в) от нормированного полоидального магнитного потока

— профили тороидального компонента плотности тока плазмы  $dp/d\psi$  и  $fdf/d\psi$ , как функции  $\bar{\psi}$ , представленные на рис. 7, в;

- полный тороидальный ток плазмы  $J_{pl} = 15$  МА;
- параметр, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе,  $\alpha = 0,995$ ;
- значение вакуумного тороидального магнитного поля  $B_0 = 5,3$  Тл на радиусе  $r_0 = 6,2$  м.

На рис. 8, а представлен пример равновесной конфигурации с X-точкой второго порядка — «snowflake» токамака TCV, определяемой реконструированными в результате решения обратной задачи токами в катушках полоидального поля. Входными параметрами обратной задачи, помимо заданных значений координат «фиттинговых» и «контрольных» точек, являлись:

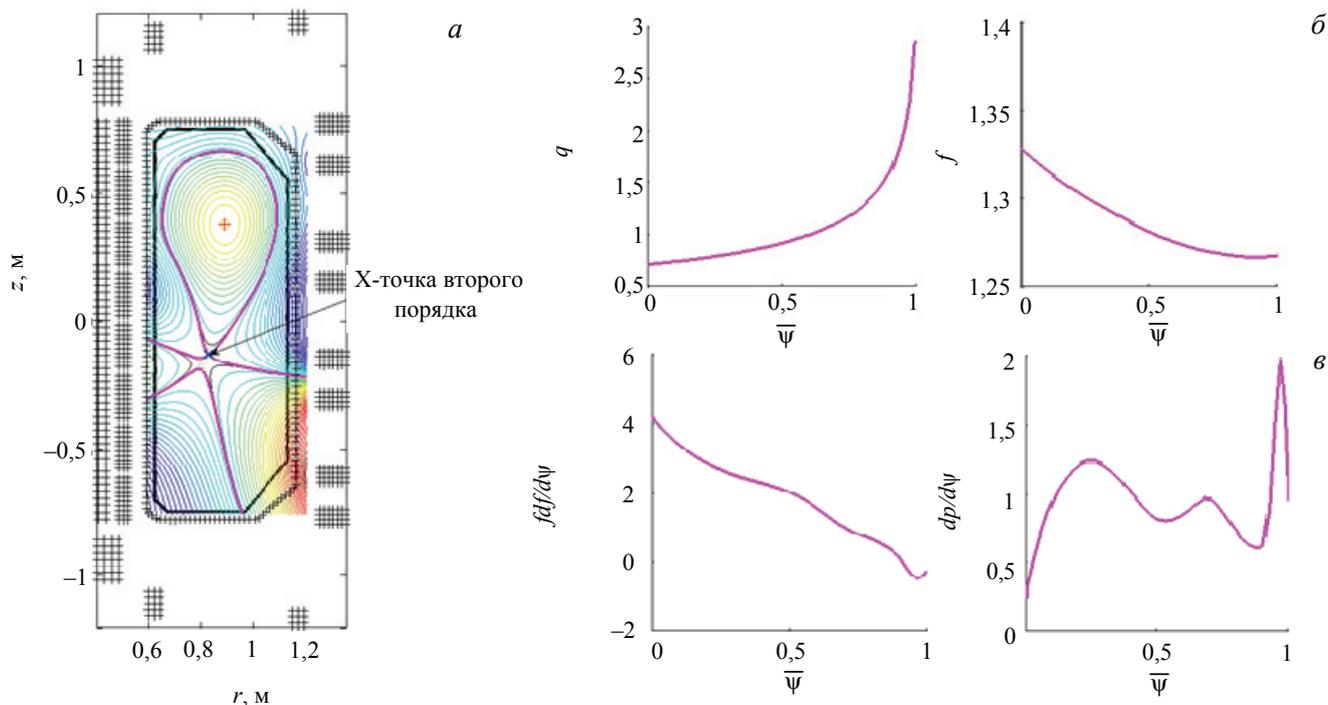


Рис. 8. Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке в реконструированных токах (случай конфигурации магнитного поля с дивертором «snowflake» (X-точка второго порядка) в токамаке TCV.) (а); зависимость  $q$  и  $f$ , соответствующих равновесной конфигурации (б), и профилей тороидального компонента плотности тока плазмы  $fdf/d\psi$  и  $dp/d\psi$  (в) от нормированного полоидального магнитного потока

- профили тороидального компонента плотности тока плазмы  $dp/d\psi$  и  $fdf/d\psi$ , как функции  $\bar{\psi}$ , представленные на рис. 8, в;

- полный тороидальный ток плазмы  $J_{pl} = 0,378$  МА;
- параметр, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе,  $\alpha = 0,995$ ;
- значение вакуумного тороидального магнитного поля  $B_0 = 1,44$  Тл на радиусе  $r_0 = 0,88$  м.

### РАСЧЁТ КВАЗИРАВНОВЕСНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ПЛАЗМЫ ТОКАМАКА С УЧЁТОМ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Квазиравновесная эволюция плазмы токамака с учётом диффузии магнитного поля в резистивной плазме и токов, наведённых в окружающих плазму пассивных проводниках и катушках полоидального магнитного поля, описывается двумерной задачей равновесия со свободной границей совместно с одномерной задачей для диффузии магнитного поля и уравнениями цепей для определения наведённых токов. Эта система дифференциальных уравнений аппроксимируется конечно-разностной схемой и решается при помощи итерационных методов при заданных начальных и граничных условиях.

В предположении вложенности магнитных поверхностей изменяющееся во времени равновесие плазмы может быть описано с помощью следующего набора потоковых функций:  $\Psi(a, t)$ ,  $\Phi(a, t)$ ,  $J_{pol}(a, t)$ ,

$J_{\text{tor}}(a, t)$ , где  $\Psi$  — полоидальный поток магнитного поля;  $\Phi$  — тороидальный поток;  $J_{\text{pol}}$  — полоидальный ток;  $J_{\text{tor}}$  — тороидальный ток;  $t$  — время;  $0 \leq a(r, z) \leq 1$  — метка магнитной поверхности — неизвестная функция цилиндрических координат  $(r, z)$ . Обычно в качестве таковой в коде SPIDER выбирается корень квадратный из нормированного тороидального потока плазмы  $a = \sqrt{\Phi}$ . Катушки полоидального поля и окружающие плазму пассивные проводящие структуры аппроксимируются конечными наборами филаментов. Предполагается, что в процессе эволюции в каждый момент времени выполняется уравнение равновесия плазмы со свободной границей (8), дополненное краевыми условиями (9), (10).

Предполагается также, что входящие в правую часть уравнения равновесия токи  $J_k$  в филаментах удовлетворяют уравнению цепей

$$R\mathbf{J}(t) + L\frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} + 2\pi\frac{d\Psi_p(t)}{dt} = \mathbf{U}(t), \quad (23)$$

где  $\mathbf{J} = \{J_k\}$  — вектор неизвестных токов в филаментах;  $R$  — матрица их сопротивлений (диагональная в нашем случае);  $L$  — матрица их взаимных индуктивностей;  $\Psi_p$  — вектор значений полоидального потока, создаваемого плазмой в точках филаментов;  $\mathbf{U}$  — вектор напряжений на активных катушках, управляющих положением, формой и другими параметрами плазмы.

Ключевым моментом моделирования квазиравновесной эволюции с учётом диффузии магнитного поля является точное решение уравнения диффузии магнитного поля при фиксированной границе плазмы.

Напишем проекцию закона Ома на направление равновесного магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$\sigma_{\parallel}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = (\mathbf{j}, \mathbf{B}) - (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{j}_B$  — плотность неиндуктивного тока в плазме (например, бустреп-тока);  $\sigma_{\parallel}$  — проводимость плазмы в направлении магнитного поля. Это уравнение, будучи усреднённым по магнитным поверхностям, с учётом уравнения индукции

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

приводит к одномерному уравнению взаимной диффузии полоидального и тороидального потоков магнитного поля [32]

$$\mu_0 \sigma_{\parallel} (\psi \Phi' - \Phi \psi') = -(fI' - If') + \langle (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}) \rangle_V V' \equiv -f^2 \left( \frac{I}{f} \right)' + \langle (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}) \rangle_V V', \quad (24)$$

где  $\psi = \frac{\Psi}{2\pi}$ ;  $f = \mu_0 \frac{J_{\text{pol}}}{2\pi}$ ;  $I = \mu_0 J_{\text{tor}}$ ;  $\langle (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}) \rangle_V$  — усреднение по объёму между соседними магнитными поверхностями;  $V$  — объём внутри магнитной поверхности; штрих и точка обозначают частные производные по потоковой переменной  $a$  и по времени  $t$  соответственно. При заданной фиксированной границе плазмы уравнение равновесия Грэда—Шафранова

$$-\frac{1}{r} \Delta^* \psi = \mu_0 j_{\phi}(r, \bar{\psi}) = \mu_0 r \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{r} f \frac{df}{d\psi} \quad (25)$$

должно быть решено совместно с уравнением диффузии (24). Уравнение равновесия (25), усреднённое по магнитным поверхностям, приводит к одномерному уравнению Крускала—Калсруда

$$\psi' I' = \Phi' f' + \mu_0 p' V'. \quad (26)$$

Для осесимметричной плазмы токамака выполнены следующие соотношения между токами и потоками:

$$I = \alpha_{22} \psi'; \quad f = \alpha_{33} \Phi'; \quad \alpha_{22} = \langle |\nabla a|^2 / r^2 \rangle_V V'; \quad \alpha_{33} = \langle 1/r^2 \rangle_V^{-1} / V'; \quad (27)$$

где коэффициенты  $\alpha_{22}(a)$ ,  $\alpha_{33}(a)$  определяются только геометрией магнитных поверхностей и выбором метки магнитных поверхностей  $a$ . Соотношения (27), (24) и (26) приводят к следующей системе двух нелинейных уравнений для потоков  $\psi$  и  $\Phi$ :

$$\mu_0 (\dot{\psi}\Phi' - \dot{\Phi}\psi') = -\frac{1}{\sigma_{\parallel}} [\alpha_{33}\Phi'(\alpha_{22}\psi')' - \alpha_{22}\psi'(\alpha_{33}\Phi')'] + \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \langle (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}) \rangle_V V'; \quad (28)$$

$$\psi'(\alpha_{22}\psi')' = (\alpha_{33}\Phi')'\Phi' + \mu_0 p' V'. \quad (29)$$

Условия для системы (28)—(29) на магнитной оси

$$I_m = 0; \Phi_m = 0; \mu_0 \dot{\psi}_m = -\frac{\alpha_{33}}{\sigma_{\parallel}} (\alpha_{22}\psi')' + \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \Phi' \langle (\mathbf{j}_B, \mathbf{B}) \rangle_V V' \quad (30)$$

следуют из определения тороидального потока и тороидального тока, отсчитываемых от магнитной оси. На границе плазмы естественное граничное условие связывает тороидальный компонент магнитного поля  $f(27)$  с его известным значением в вакууме

$$\alpha_{33}\Phi' = f_{\text{vac}}. \quad (31)$$

Величина  $f_{\text{vac}}$ , как и полоидальный поток  $\Psi_{\text{ext}}$ , определяется внешними проводниками и не зависит от плазмы. В силу соотношения на границе плазмы

$$\psi_p(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_p} \frac{G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} dl$$

и с учётом соотношения  $\psi = \psi_p + \psi_{\text{ext}}$  имеем

$$\psi(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_p} \frac{G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = \psi_{\text{ext}}, \quad (32)$$

где  $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$  — функция Грина для оператора Грэда—Шафранова (1), где  $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega_p$ ,  $\mathbf{r} \in \partial\Omega_p$ . Усреднение уравнения (32) по границе плазмы даёт дополнительное граничное условие для системы уравнений (28)—(29). Каждый шаг итерационного процесса включает решение одномерных уравнений (28)—(29) при фиксированной геометрии магнитных поверхностей, что позволяет вычислить  $ff'_{\psi}(a)$ . Затем решение уравнения Грэда—Шафранова с полученным профилем  $ff'_{\psi}(a)$  даёт новое приближение магнитных поверхностей.

Рассмотрим конкретный пример расчёта варианта VDE (vertical displacement event) квазиравновесной эволюции плазмы токамака-реактора ИТЭР с касанием лимитера и последующим обрезанием плазмы по лимитеру.

В качестве исходной равновесной плазменной конфигурации ( $t = 0$ ) с неизвестной свободной границей плазмы и вложенными магнитными поверхностями в коде SPIDER рассчитывается бессиловое ( $p'_{\psi} = 0$ ) равновесие со следующими входными параметрами:

— профили потоковых функций  $p'_{\psi} = 0$  и  $ff'_{\psi}$  — линейная функция потоковой переменной  $\bar{\psi}$ ;

— полный тороидальный ток плазмы  $J_{\text{pl}} = 15$  МА, тороидальное вакуумное магнитное поле  $B_{\text{tor}} = 5,3$  Тл на радиусе  $r = 6,5$  м;

— «геометрия» катушек полоидального поля токамака-реактора ИТЭР с предписанными значениями протекающих в них токов.

В ходе последующей квазиравновесной эволюции полагаются заданными и фиксированными во времени профили давления  $p'_{\psi} = 0$  и температуры  $T = T_b + (T_{\text{ax}} - T_b)(1 - a^2)$ , где  $a = \sqrt{\bar{\Phi}}$  — потоковая переменная;  $T_{\text{ax}} = 3 \cdot 10^3$  эВ,  $T_b = 10^2$  эВ — предписанные значения температуры на магнитной оси и границе плазмы соответственно; проводимость плазмы — спитцеровская,  $\sigma_{\parallel} \sim T^{3/2}$ .

На рис. 9, *a*, *б* показаны исходная равновесная конфигурация ИТЭР с покрывающей всю расчётную область расчётной сеткой и отдельно равновесие в плазме соответственно. В области, занимаемой плазмой, сетка адаптирована к искомым магнитным поверхностям. На рисунках показаны положение катушек полоидального магнитного поля, окружающих плазму пассивных проводящих структур, и граница плазмы, а также отмечено положение лимитерных точек, ограничивающих положение плазмы. На рис. 9, *a*, *б* показаны соответствующие исходному равновесию профили основных потоковых функций. Рис. 9, *в*, *г* демонстрируют соответствующее исходному равновесию распределение плотности тороидального тока плазмы  $j_\phi(r, z)$  на плоскости  $(r, z)$ .

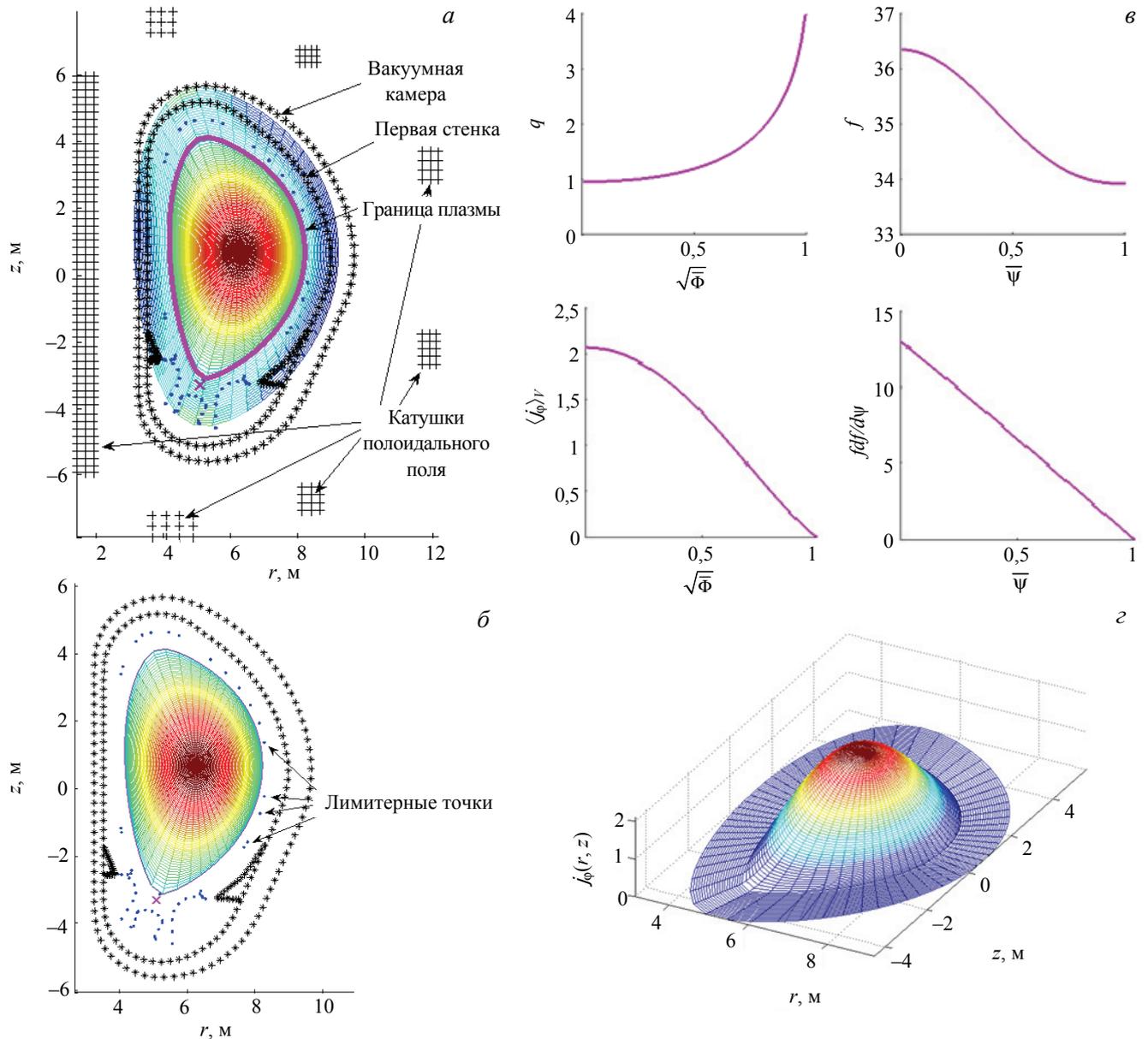


Рис. 9. Исходное равновесие: *a* — расчётная сетка, адаптивная к магнитным поверхностям в плазме; *б* — исходное равновесие плазмы; *в* — профили  $q$ ,  $f$ ,  $\langle j_\phi \rangle / r$ ,  $f df / d\psi$ , соответствующие исходному равновесию плазмы; *г* — трёхмерный график плотности тороидального тока в единицах  $0,4 \text{ л MA/m}^2$ , соответствующий исходной равновесной конфигурации

На каждом временном шаге квазиравновесной эволюции самосогласованно решается задача, описываемая следующей нелинейной системой уравнений:

- уравнение равновесия осесимметричной плазмы со свободной границей (8);
- система уравнений для расчёта токов Фуко (23), наведённых в окружающую плазму проводящих структурах;
- уравнение диффузии магнитного поля (24), дополненное соответствующими начальными и краевыми условиями.

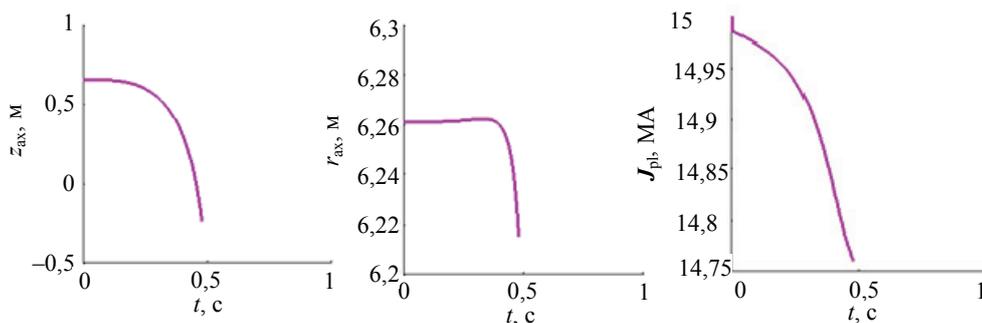


Рис. 10. Эволюция координат магнитной оси и полного тороидального тока плазмы

В ходе VDE-эволюции неустойчивая при отсутствии стабилизации обратными связями плазма движется по преимуществу в вертикальном направлении по экспоненциальной временной траектории. На рис. 10 показаны соответствующие траектории для координат магнитной оси  $z_{ax}(t)$ ,  $r_{ax}(t)$  и полного тороидального тока плазмы  $J_{pl}(t)$ .

В результате этого движения в некоторый момент времени граница плазмы касается одного из лимитеров. В ходе дальнейшего движения срезается приграничный слой плазмы снаружи от магнитной поверхности, касающейся данного лимитера, с соответствующей частью полоидального тока  $F$ . Срезание части полоидального тока влечёт за собой уменьшение в плазме тороидального магнитного поля и, как следствие, тороидального потока  $\Phi$ . На рассматриваемом отрезке времени плазма реагирует на такого рода возмущения как идеальный проводник, следствием чего является возникновение в приграничном слое равновесного тока, компенсирующего эти возмущения для сохранения тороидального магнитного потока внутри каждой магнитной поверхности, движущейся вместе с плазмой. В случае идеально-проводящей плазмы возникающий приграничный ток был бы поверхностным, что соответствовало бы разрыву тороидального магнитного поля на границе плазмы.

Рис. 11 (финальное равновесие) аналогичен рис. 9 для исходного равновесия.

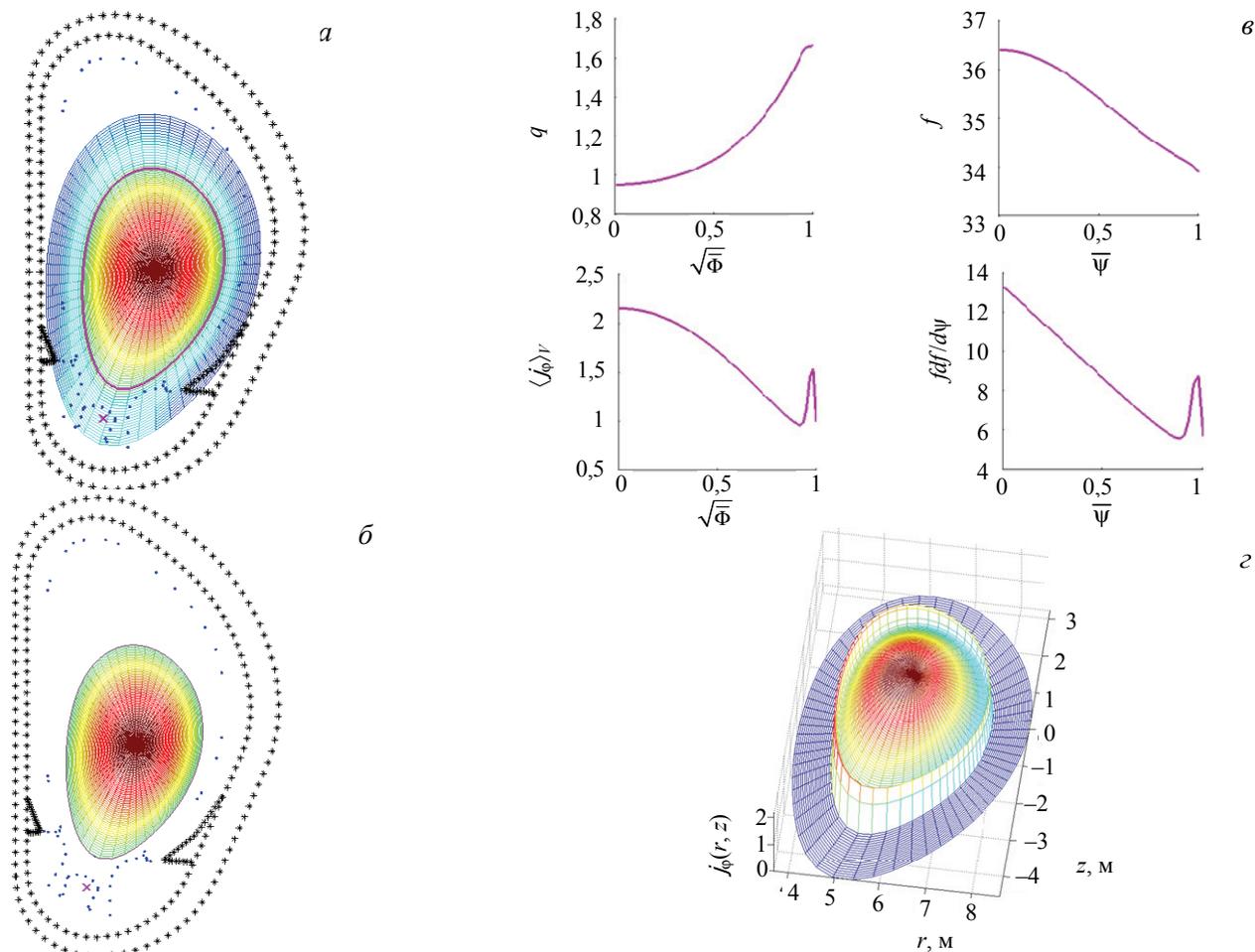


Рис. 11. Расчётная сетка, адаптивная к магнитным поверхностям в плазме, на момент времени  $t = 0,478$  с (а); равновесие плазмы на финальный момент времени  $t = 0,478$  с; профили  $q, f, \langle j_{\phi} \rangle_r, fdf/d\psi$ , соответствующие этому равновесию плазмы (б); трёхмерный график плотности тороидального тока в единицах  $0,4\pi$  МА/м<sup>2</sup>, соответствующий этой равновесной конфигурации (г)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многомодульный вычислительный код SPIDER для численного моделирования равновесия и эволюции плазмы токамака успешно применяется для решения различных задач. Эффективные методы решения прямой и обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей на фиксированной прямоугольной и адаптивной к магнитным поверхностям расчётных сетках позволяют точно определять положение плазмы и токи в катушках полоидального магнитного поля для существующих токамаков и проекта ИТЭР, включая случай диверторной конфигурации с нулем второго порядка для полоидального поля. Численное решение задачи квазиравновесной эволюции плазмы с учётом диффузии магнитного поля и вихревых токов в проводящих структурах может быть использовано для моделирования управления плазмой и расчёта её динамики во время срыва и развития периферийной локализованной неустойчивости. Функциональные возможности кода расширяются, в частности, для моделирования эффектов анизотропии давления и вращения плазмы [33]. Модульная структура кода SPIDER облегчает его применение в сочетании с кодами для расчёта переноса энергии и частиц, нагрева и генерации тока в плазме токамака.

Авторы благодарны своим коллегам В.В. Дроздову и С.А. Галкину за многолетнее сотрудничество при разработке методов расчёта равновесия и динамики плазмы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shafranov V.D.** — Reviews of Plasma Physics (Consultants Bureau, New York), 1966, vol. 2, p. 103.
2. **Grad H., Hogan J.** — Phys. Rev. Lett., 1970, vol. 24, p. 1337.
3. **Grad H., Hu P.N., Stevens D.C.** — Proc. Natl. Acad. Sci. (USA), 1975, vol. 72, p. 3789.
4. **Zakharov L.E., Shafranov V.D.** — Reviews of Plasma Physics (Consultants Bureau, New York), 1981, vol. 11, p. 153.
5. **Khairutdinov R.R., Lukash V.E.** — J. Comput. Phys., 1993, vol. 109, p. 193.
6. **Degtyarev L., Martynov A., Medvedev S., Troyon F., Villard L., Gruber R.** — Comput. Phys. Commun., 1997, vol. 103, p. 10.
7. **Galkin S.A., Drozdov V.V., Ivanov A.A., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu.** General Atomic Report GA-A23045, 1999.
8. **Galkin S.A., Ivanov A.A., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu.** — Nucl. Fusion, 1997, vol. 37, № 10, p. 1455.
9. **Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Медведев С.Ю.** Численное моделирование равновесия и устойчивости тороидальной плазмы. Монография Института прикладной математики им. М.В. Келдыша. — М. 1989.
10. **Ivanov A.A., Khayrutdinov R.R., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu.** The SPIDER Code-Axisymmetric Fixed Boundary Plasma Equilibrium Solver: KIAM Preprint 2006, № 7. URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2006/source/prep2006\\_07.doc](http://www.keldysh.ru/papers/2006/source/prep2006_07.doc).
11. **DeLucia J., Jardin S.C., Todd A.M.** — J. Comput. Phys., 1980, vol. 37, p. 183.
12. **Huysmans G.T.A., Goedbloed J.P., Kerner W.** — In: Proc. CP90 Conf. on Computational Physics Proceedings. World Scientific, Singapore, 1991, p. 371.
13. **Degtyarev L.M., Drozdov V.V.** — Intern. J. Mod. Phys., 1991, vol. 2, p. 30.
14. **Medvedev S.Yu., Villard L., Degtyarev L.M., Martynov A.A., Gruber R., Troyon F.** — In: 20th EPS Conf. on Controlled Fusion and Plasma Phys. Lisbon, Proc. Contrib. Papers, 1993, vol. 17C, part IV, p. 1279.
15. **Ivanov A.A., Khayrutdinov R.R., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu.** — The SPIDER code — Solution of Direct and Inverse Problems for Free Boundary Tokamak Plasma Equilibrium: KIAM Preprint № 39. 2009. URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2009/prep39/prep2009\\_39.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2009/prep39/prep2009_39.pdf).
16. **Khayrutdinov R.R., Lukash V.E.** Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse variable technique. — J. Comput. Physics, 1993, vol. 109, p. 193—201.
17. **Jardin S.C., Pomphrey N., DeLucia J.** Dynamic modeling of transport and positional control of tokamaks. — J. Comput. Physics, 1986, vol. 66, p. 481.
18. **Croatinger J.A. et al.** 1997 CORSICA: a Comprehensive Simulation of Toroidal Magnetic Fusion Devices. Report UCRL-ID-126284, Lawrence Livermore National Laboratory, CA.
19. **Cenacchi G., Tarini A.** JETTO: A Free-Boundary Plasma Transport Code (basic version). JET-IR (88) 03.
20. **Blum J., LeFoll J.** The self-consistent equilibrium and diffusion SCED. — Comput. Phys. Commun., 1981, vol. 24, p. 235.
21. **Barabaschi P.** — In: The MAXFEA Code. Plasma Control Technical Meeting. Naka, Japan, April 1993.
22. **Ryutov D.D., Cohen R.H., Rognlien T.D., Umansky M.V.** — Physics of Plasmas, 2008, vol. 15, p. 092501.
23. **Lao L.L., Jensen T.N. et al.** Magnetohydrodynamic equilibria of attached plasmas after loss of vertical stability in elongated tokamaks. — Nucl. Fusion, 1991, vol. 31, p. 1909.
24. **Hofmann F., Tonetti G.** Tokamak equilibrium reconstruction using Faraday rotation measurements. — Nucl. Fusion, 1988, vol. 37, p. 1871.
25. **Schneider W., McCarthy P.J., Lackner K., Gruber O., Behler K., Martin P., Merkel R.** ASDEX upgrade MHD equilibria reconstruction on distributed workstations. — Fusion Engineering and Design, 2000, vol. 48, Issues 1—2, p. 127—134.

26. **Иванов А.А., Хайрутдинов Р.Р., Медведев С.Ю., Пошехонов Ю.Ю., Гарина С.М.** Вычислительный код SPIDER — расчет квазиравновесной эволюции плазмы токамака с учетом диффузии магнитного поля: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 52, 2008. URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep52/prep2008\\_52.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep52/prep2008_52.pdf).
27. **Galkin S.A., Ivanov A.A., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu.** — Nucl. Fusion, 1997, vol. 37, p. 1455.
28. **Lackner K.** — Comput. Phys. Commun., 1976, vol. 12, p. 33.
29. **Galkin S.A., Drozdov V.V.** — Sov. J. Differential Equations, 1988, № 24, p. 1171.
30. **Galkin S.A., Drozdov V.V., Semenov V.N.** — Sov. J. Plasma Physics, 1989, vol. 15, № 3, p. 288.
31. **Galkin S.A., Denisov A.A., Drozdov V.V., Drozdova O.M.** — Astron. Astrophys., 1993, vol. 269, p. 255.
32. **Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.** Равновесие плазмы с током в тороидальных системах. — В сб.: Вопросы теории плазмы. — М.: Энергоиздат, 1982, вып. 11, с. 118.
33. **Иванов А.А., Мартынов А.А., Медведев С.Ю., Пошехонов Ю.Ю.** Вычислительный код SPIDER. Решение задачи равновесия плазмы с анизотропным давлением и вращением в токамаке: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 24, 2013. URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_24.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013_24.pdf).



Андрей Александрович Иванов, с.н.с.; Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, Россия  
aai@a5.kiam.ru



Александр Александрович Мартынов, с.н.с., к.ф.-м.н.; Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, Россия  
martynov@a5.kiam.ru



Сергей Юрьевич Медведев, заведующий сектором, к.ф.-м.н.; Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, Россия  
medvedev@a5.kiam.ru



Юрий Юрьевич Пошехонов, с.н.с., к.ф.-м.н.; Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, Россия  
naida@a5.kiam.ru



Сергей Владимирович Коновалов, нач. лаборатории, к.ф.-м.н.; НИЦ «Курчатовский институт», 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1, Россия  
konoval@nfi.kiae.ru



Рустам Рашитович Хайрутдинов, в.н.с., д.ф.-м.н., лауреат премии им. И.В. Курчатова; НИЦ «Курчатовский институт», 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1, Россия  
khayrutd@mail.ru

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2013 г.  
Вопросы атомной науки и техники.  
Сер. Термоядерный синтез, 2014, т. 37, вып. 1, с. 80—96.