

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СКОРОСТЯХ РЕАКЦИЙ СИНТЕЗА В ПЛАЗМЕ С УЧЁТОМ НАДТЕПЛОВЫХ ТОПЛИВНЫХ ЯДЕР

П.Р. Гончаров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

Вычисление скоростей реакций необходимо не только для расчётов нейтронного выхода и мощности реактора, но и в качестве одного из способов верификации нейтронных спектров, так как распределение продуктов ядерного синтеза по энергиям и углам должно быть нормировано на полную реактивность. В статье приводится дополненное по сравнению с одним из первоисточников доказательство формулы для реактивности в случае, когда азимутально симметричные распределения взаимодействующих частиц по скоростям имеют вид разложений по полиномам Лежандра. Демонстрируются примеры вычислений для изотропного и анизотропного случаев.

Ключевые слова: источник нейтронов, распределение продуктов ядерного синтеза.

A SUPPLEMENTARY NOTE ON FUSION REACTION RATES IN A PLASMA TAKING INTO ACCOUNT SUPRATHERMAL FUEL NUCLEI

P.R. Goncharov

Peter the Great Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

Calculations of reaction rates are necessary not only for estimations of the neutron yield and the power of a reactor, but also as one of the methods for verification of neutron spectra because energy and angle distributions of nuclear fusion products should be normalized to the total reactivity. The paper describes an amended, compared with one of bibliographic sources, proof of the formula for the reactivity for the case when azimuthally symmetric velocity distributions of interacting particles are in the form of expansions in Legendre polynomials. Examples of calculation results are given for the isotropic and the anisotropic case.

Key words: neutron source, distributions of nuclear fusion products.

ВВЕДЕНИЕ

Вычисление скоростей реакций ядерного синтеза, а также энергетических и угловых распределений продуктов этих реакций является необходимой частью физического базиса для работ по созданию источников нейтронов и гибридных систем синтез—деление на основе установок с магнитным удержанием плазмы [1—3], разработки бланкетов таких систем [4, 5], развития ядерных технологий управляемого синтеза [6—8]. Формулы для дифференциальных реактивностей (по кинетической энергии продукта синтеза и углу вылета в лабораторной системе) приведены в новой работе [9]. Эти расчёты также необходимы для анализа данных нейтронной спектрометрии термоядерной плазмы, подробно рассмотренной в недавних работах [10, 11] и ссылках в них. Кроме того, вычисление пространственных, энергетических и угловых распределений источников продуктов ядерного синтеза необходимо для экспериментальных и теоретических исследований удержания быстрых альфа-частиц и условия зажигания [12, 13].

Скорость реакции ядерного синтеза, т.е. число элементарных актов взаимодействия между частицами сортов « i » и « j » в единице объёма в единицу времени, есть

$$R_{ij} = n_i n_j R_{ij} / (1 + \delta_{ij}), \quad (1)$$

где дельта Кронекера δ_{ij} обеспечивает двойку в знаменателе в случае реакции между ядрами одного сорта. Величина R_{ij} определяется плотностями топливных ядер n_i и n_j и реактивностью

$$R_{ij} = \int \sigma(v) v f_i(\mathbf{v}_i) f_j(\mathbf{v}_j) d^3 \mathbf{v}_i d^3 \mathbf{v}_j, \quad (2)$$

которая представляет собой шестикратный интеграл по всему пространству скоростей топливных ядер с нормированными на единицу функциями распределения $f_i(\mathbf{v}_i)$ и $f_j(\mathbf{v}_j)$. Здесь $v = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$ — модуль относительной скорости частиц сортов « i » и « j ». Табличные данные и рабочие аппроксимационные формулы

для расчёта дифференциальных $d\sigma/d\Omega_{\text{С.М.}}$ ($d\Omega_{\text{С.М.}}$ — элемент телесного угла в системе центра масс) и полных $\sigma(v)$ сечений реакций синтеза, в частности, $D(D, n)\text{He}^3$ и $T(D, n)\text{He}^4$, приведены в отчёте [14].

В работе [9] объяснён вывод двух приводящих к одинаковому результату формул для энергетических спектров продуктов ядерного синтеза в случае изотропных распределений топливных ядер по скоростям:

$$\frac{dR_{12}}{dE_3} = \frac{8\pi^2 v_3}{m_3} \int_0^\infty v^3 dv \int_0^\pi d\gamma \frac{d\sigma(v, \xi)}{d\Omega_{\text{С.М.}}} \sin \gamma \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi f_1(v_1) f_2(v_2); \quad (3, a)$$

$$\frac{dR_{12}}{dE_3} = 8\pi^2 \int_0^\infty v_1^2 f_1(v_1) dv_1 \int_0^\infty v_2^2 f_2(v_2) dv_2 \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{dE_3} v d\xi, \quad (3, б)$$

и двух приводящих к одинаковому результату формул для распределения продуктов ядерного синтеза по энергиям и углам в анизотропном случае:

$$\frac{d^2 R_{12}}{dE_3 d\Omega_3} = \frac{v_3}{m_3} \int_0^\infty v^3 dv \int_0^\pi d\gamma \frac{d\sigma(v, \xi)}{d\Omega_{\text{С.М.}}} \sin \gamma \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\Phi f_1(v_1, \vartheta_1) f_2(v_2, \vartheta_2), \quad (4, a)$$

$$\frac{d^2 R_{12}}{dE_3 d\Omega_3} = \frac{1}{m_3} \int_0^\infty v dv \int_0^\infty \frac{v^3}{L(v)} \frac{d\sigma(v, \xi)}{d\Omega_{\text{С.М.}}} J(v, v) dv \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\Phi f_1(v_1, \vartheta_1) f_2(v_2, \vartheta_2). \quad (4, б)$$

Здесь нижние индексы «1» и «2» соответствуют топливным ядрам, нижний индекс «3» соответствует какому-либо одному из двух продуктов синтеза. Для того чтобы производить вычисления дифференциальных реактивностей по формуле (3, а) или (3, б) в изотропном случае и двойных дифференциальных реактивностей по формуле (4, а) или (4, б) в анизотропном случае, необходимо использовать указанные в работе [9] формулы, выражающие все подынтегральные величины через переменные интегрирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве одного из методов верификации полученных результатов в работе [9] применяется проверка соответствия между вычисленной независимо полной реактивностью (2) и интегралами от найденных распределений (3, а) и (3, б) по энергии либо интегралами от найденных распределений (4, а) и (4, б) по энергии и углам. В случае изотропных распределений топливных ядер по скоростям формула (2) для полной реактивности может быть сведена к тройному интегралу

$$R_{12} = 8\pi^2 \int_0^\infty v_1 f_1(v_1) dv_1 \int_0^\infty v_2 f_2(v_2) dv_2 \int_{|v_1-v_2|}^{v_1+v_2} \sigma(v) v^2 dv. \quad (5)$$

В случае анизотропных распределений топливных ядер по скоростям, обладающих азимутальной симметрией и выражающихся в виде разложений по полиномам Лежандра

$$f_1(v_1, \xi_1) = \sum_{m=0}^\infty a_m(v_1) P_m(\xi_1); \quad (6)$$

$$f_2(v_2, \xi_2) = \sum_{l=0}^\infty b_l(v_2) P_l(\xi_2), \quad (7)$$

где v_1 и v_2 — модули скоростей ядер сортов «1» и «2» и введены обозначения $\xi_{1,2} = \cos \vartheta_{1,2}$ для косинусов полярных углов, формула (2) для полной реактивности может быть сведена к следующей сумме со слагаемыми в виде тройных интегралов:

$$R_{12} = 8\pi^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1} \int_0^\infty v_1 a_n(v_1) dv_1 \int_0^\infty v_2 b_n(v_2) dv_2 \int_{|v_1-v_2|}^{v_1+v_2} \sigma(v) v^2 P_n\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 - v^2}{2v_1 v_2}\right) dv. \quad (8)$$

Заметим, что формула (5) является, как и должно быть, частным случаем формулы (8), когда $a_n(v_1)$ и $b_n(v_2)$ тождественны нулю для всех индексов, кроме нулевого, что и соответствует угловой изотропии. Изящное доказательство формулы (8) было дано в известной работе [15].

В отчёте [16] приведено альтернативное доказательство формулы (8), особенность которого в том, что оно является исключительно аналитическим, в то время как в [15] используется геометрический приём, связанный с выбором полярной оси в пространстве скоростей. Аналитический формализм может быть полезен при работе с функциями распределения взаимодействующих частиц по скоростям вида (6), (7). Однако в приведённом в [16] доказательстве опущены некоторые детали, а также имеет место опечатка в формуле, выражающей результат.

В свете этого цель настоящей статьи состоит в том, чтобы привести исправленное и дополненное доказательство формулы (8) по методу [16] и продемонстрировать совпадение с результатом [15]. Кроме того, далее для наглядности изложено краткое независимое, т.е. не как частного случая (8), доказательство формулы (5) для изотропного случая.

В качестве иллюстрации результатов вычислений приведены энергетические спектры для изотропного случая и распределения продуктов ядерного синтеза по энергиям и углам для анизотропного случая, а также полученные, исходя из этих распределений, интегральные по энергиям и углам значения, которые совпадают с полными реактивностями, вычисленными по формулам (5) и (8).

СЛУЧАЙ ИЗОТРОПНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть функции распределения взаимодействующих частиц сортов «1» и «2» зависят только от модулей их скоростей. Для наглядности применим геометрический приём, использованный в [15] в более общем виде, непосредственно к изотропному случаю, так как это позволяет получить результат (5) в несколько шагов.

Действительно, введём сферические координаты $v_1, \vartheta_1, \varphi_1$ и сделаем интегрирование по $d^3\mathbf{v}_1$ в (2) внешним, тогда с точки зрения внутреннего интеграла по $d^3\mathbf{v}_2$ вектор \mathbf{v}_1 является фиксированным. Введём сферические координаты $v_2, \vartheta_2, \varphi_2$, выбрав направление вектора \mathbf{v}_1 в качестве полярной оси. Тогда полярный угол ϑ_2 в то же время является углом между векторами \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Поскольку модуль относительной скорости при этом есть

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\vartheta_2}, \quad (9)$$

сделаем интеграл по $d\vartheta_2$ внутренним и выполним замену переменной от ϑ_2 к v , учитывая, что

$$\sin\vartheta_2 d\vartheta_2 = \frac{v dv}{v_1 v_2}, \quad (10)$$

и изменяя соответствующим образом область интегрирования с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[|v_1 - v_2|, (v_1 + v_2)]$ согласно (9). Интеграл по азимутальному углу φ_2 оказывается тривиальным и даёт множитель 2π . В силу угловой изотропии интегралы по углам ϑ_1 и φ_1 также являются тривиальными и вместе дают множитель 4π . Таким образом, от шестикратного интеграла (2) приходим к трехкратному интегралу (5), что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ АНИЗОТРОПНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Для анизотропных, но азимутально симметричных распределений частиц сортов «1» и «2», вводя в (2) сферические координаты в пространстве скоростей \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , получаем

$$R_{12} = \int_0^\infty v_1^2 dv_1 \int_0^\infty v_2^2 dv_2 \int_0^\pi \sin\vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^\pi \sin\vartheta_2 d\vartheta_2 f_1(v_1, \vartheta_1) f_2(v_2, \vartheta_2) \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \sigma(v) v, \quad (11)$$

где согласно известной формуле для косинуса угла между двумя векторами, заданными в сферической системе, модуль относительной скорости есть

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2))}. \quad (12)$$

При подстановке (12) в (11) можно заменить $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\cos\varphi_1$, так как интеграл от периодической функции по любому отрезку длиной в период одинаков, т.е. интеграл по φ_2 оказывается тривиальным и даёт множитель 2π .

Можно производить вычисления реактивности непосредственно по формуле (11) для функций распределения общего вида. Для функций распределения, заданных в виде разложений (6), (7), формула (2) приводится к формуле (8). Далее приведено доказательство этого утверждения.

Запишем дельта-функцию Дирака $\delta(u - v^2)$, тогда по её определению справедливо следующее тождество:

$$\sigma(v)v = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u - v^2) \sigma(\sqrt{u}) \sqrt{u} du, \quad (13)$$

где u — рабочая переменная, имеющая размерность квадрата скорости. Используем интегральное представление дельта-функции

$$\delta(u - v^2) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik(u - v^2)) dk \quad (14)$$

и изменим порядок интегрирования, записав (2) следующим образом:

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} du \sigma(\sqrt{u}) \sqrt{u} \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iku) dk \int d^3 \mathbf{v}_1 \int d^3 \mathbf{v}_2 f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \exp(-ikv^2). \quad (15)$$

Введём обозначения

$$g(k) = \int d^3 \mathbf{v}_1 \int d^3 \mathbf{v}_2 f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \exp(-ikv^2); \quad (16)$$

$$G(u) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \exp(iku) dk. \quad (17)$$

Тогда (15) можно переписать в виде

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\sqrt{u}) \sqrt{u} G(u) du, \quad (18)$$

т.е. следуя работе [16], мы применили предложенный в ней формальный приём, переписав (2) пока в более громоздком виде восьмикратного интеграла вместо шестикратного за счёт использования тождеств (13) и (14). Используем теперь сферические координаты в пространстве скоростей \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 и формулу (12) для модуля относительной скорости. Введённая функция (16) записывается в виде интегралов по новым переменным сферической системы координат:

$$g(k) = \int_0^{\infty} v_1^2 dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 dv_2 \int_{-1}^{+1} d\xi_1 \int_{-1}^{+1} d\xi_2 f_1(v_1, \xi_1) f_2(v_2, \xi_2) \exp(-ik(v_1^2 + v_2^2)) \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \exp\left(ik \times 2v_1 v_2 \left(\xi_1 \xi_2 + \sqrt{1 - \xi_1^2} \sqrt{1 - \xi_2^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right)\right). \quad (19)$$

Здесь предполагается азимутальная симметрия, т.е. $f_1(\mathbf{v}_1)$ и $f_2(\mathbf{v}_2)$ не зависят от углов φ_1 и φ_2 . Далее воспользуемся разложением Бауэра, доказательство которого приведено в монографии [17] со ссылкой на оригинальную работу [18]:

$$e^{iYX} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(Y) P_n(X), \quad (20)$$

где $j_n(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2Y}} J_{n+1/2}(Y)$ — сферические функции Бесселя I рода; $P_n(X)$ — полиномы Лежандра. Тогда

$$g(k) = \int_0^{\infty} v_1^2 dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 dv_2 \int_{-1}^{+1} d\xi_1 \int_{-1}^{+1} d\xi_2 f_1(v_1, \xi_1) f_2(v_2, \xi_2) \exp(-ik(v_1^2 + v_2^2)) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(2v_1 v_2 k) P_n(\xi_1 \xi_2 + \sqrt{1-\xi_1^2} \sqrt{1-\xi_2^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (21)$$

Применим теперь теорему сложения для сферических гармоник [19] в следующем виде:

$$P_n(\xi_1 \xi_2 + \sqrt{1-\xi_1^2} \sqrt{1-\xi_2^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) = P_n(\xi_1) P_n(\xi_2) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\xi_1) P_n^m(\xi_2) \cos(m(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (22)$$

где $P_n^m(z)$ — присоединённые функции Лежандра. Поскольку $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\varphi_1 - \varphi_2)) d\varphi_1 d\varphi_2 = 0$ для любых натуральных m , интегрирование по азимутальным углам в (21) оказывается тривиальным и даёт множитель $4\pi^2$, поэтому

$$g(k) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} v_1^2 dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 dv_2 \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 f_1(v_1, \xi_1) f_2(v_2, \xi_2) \exp(-ik(v_1^2 + v_2^2)) \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(2v_1 v_2 k) P_n(\xi_1) P_n(\xi_2). \quad (23)$$

Теперь подставим функции распределения топливных ядер по скоростям в виде разложений по полиномам Лежандра (6), (7) и дважды используем условие ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_m(\xi_1) P_n(\xi_1) d\xi_1 = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}; \quad (24)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi_2) P_n(\xi_2) d\xi_2 = \frac{2}{2n+1} \delta_{ln}. \quad (25)$$

Получаем следующее выражение:

$$g(k) = 16\pi^2 \int_0^{\infty} v_1^2 dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 dv_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2n+1} a_n(v_1) b_n(v_2) j_n(2v_1 v_2 k) \exp(-ik(v_1^2 + v_2^2)), \quad (26)$$

которое можно подставить в (17). Тогда, внося интегрирование под знак суммы, имеем

$$G(u) = 8\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\infty} v_1^2 a_n(v_1) dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 b_n(v_2) dv_2 v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} i^n j_n(2v_1 v_2 k) \exp(ik(u - v_1^2 - v_2^2)) dk. \quad (27)$$

Для удобства вычисления внутреннего интеграла, с точки зрения которого величины u , v_1 и v_2 являются размерными параметрами, введём безразмерный параметр

$$x = \frac{v_1^2 + v_2^2 - u}{2v_1 v_2} \quad (28)$$

и новую безразмерную переменную интегрирования

$$y = -2v_1 v_2 k. \quad (29)$$

Теперь перепишем внутренний интеграл в (27) в виде

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} i^n j_n(2v_1 v_2 k) \exp(ik(u - v_1^2 - v_2^2)) dk = \frac{\pi}{2v_1 v_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^n j_n(-y) e^{ixy} dy. \quad (30)$$

Покажем, что справедливо следующее преобразование Фурье:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x) P_n(x) e^{-ix} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^n j_n(-y), \quad (31)$$

где функция $\Pi(x)$ равна единице на отрезке $[-1, +1]$ и равна нулю вне его. Иными словами,

$$\Pi(x) = H(x+1) - H(x-1), \quad (32)$$

где $H(x)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда. Для экспоненты в подынтегральном выражении в левой части (31) воспользуемся разложением Бауэра (20). Согласно (32) пределы интегрирования в (31) можно сузить до отрезка $[-1, +1]$, а множитель $\Pi(x)$ при этом опустить. Тогда, внося интегрирование под знак суммы, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x) P_n(x) e^{-iyx} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2m+1) i^m j_m(-y) v.p. \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx, \quad (33)$$

что действительно эквивалентно (31), учитывая условие ортогональности полиномов Лежандра.

Таким образом получаем

$$G(u) = 8\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\infty} v_1^2 a_n(v_1) dv_1 \int_0^{\infty} v_2^2 b_n(v_2) dv_2 \frac{\pi}{2v_1 v_2} \Pi\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 - u}{2v_1 v_2}\right) P_n\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 - u}{2v_1 v_2}\right). \quad (34)$$

Подставив (34) в выражение для реактивности (18), сделав интеграл по du внутренним, сузив его пределы интегрирования до отрезка $[(v_1 - v_2)^2, (v_1 + v_2)^2]$, на котором подынтегральная функция не обращается в ноль, и, наконец, перейдя к переменной интегрирования $v = \sqrt{u}$ и изменив соответствующим образом пределы интегрирования, приходим к формуле (8), что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Термоядерные спектры и полные скорости реакций можно использовать для верификации более общих формул, применимых для распределений общего вида. Для частного случая максвелловских функций распределения топливных ядер сортов «1» и «2» при одинаковой температуре

$$f_{1,2}^{(M)}(v_{1,2}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{m_{1,2}}{2T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_{1,2} v_{1,2}^2}{2T}\right) \quad (35)$$

формулу для энергетического спектра продуктов синтеза можно свести к двукратному интегралу

$$\begin{aligned} \frac{dR_{12}}{dE_3} = 4 \frac{v_3}{m_3} \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{T^3} \exp\left(-\frac{M v_3^2}{2T}\right) \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{M L^2(v) + \mu v^2}{2T}\right) dv \int_0^{\pi} \sin \gamma \times \\ \times \frac{d\sigma(v, \xi)}{d\Omega_{\text{С.М.}}} \exp\left(-\frac{M v_3 L(v)}{T} \cos \gamma\right) d\gamma, \end{aligned} \quad (36)$$

где $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2 / M$. Если угловой зависимостью сечения реакции можно пренебречь, то $d\sigma/d\Omega_{\text{С.М.}} \approx \sigma(v)/4\pi$ и энергетический спектр продуктов термоядерного синтеза сводится к выражению

$$\frac{dR_{12}}{dE_3} = \frac{2}{\pi} \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{m_3 M T^2} \exp\left(-\frac{M v_3^2}{2T}\right) \int_0^{\infty} \frac{\sigma(v) v^3}{L(v)} \exp\left(-\frac{M L^2(v) + \mu v^2}{2T}\right) \sin h\left(\frac{M v_3 L(v)}{T}\right) dv, \quad (37)$$

которое было выведено ещё в ранних работах, например, в [20]. Необходимые для расчётов формулы, явно выражающие все подынтегральные величины в (36) и (37) через переменные интегрирования, даны в работе [9].

Реактивности для термоядерного случая (35) для ряда наиболее важных реакций описаны, например, в работах [21, 22] как функции температуры в виде готовых рабочих аппроксимаций. Формула (2) в этом случае сводится к однократному интегралу, который в безразмерном виде выглядит как

$$R_{12}(\mu/T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 \gamma^{3/2} \int_0^{\infty} \sigma(y) f(y) dy, \quad (38)$$

где безразмерная функция $f(y) = y e^{-\gamma y}$, безразмерная переменная интегрирования $y = v^2/v_0^2$, безразмерный параметр $\gamma = \mu v_0^2/2T$, $v_0 \approx 2,19 \cdot 10^8$ см/с обозначают атомную единицу скорости.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Результаты расчётов полных реактивностей и энергетических спектров нейтронов, образующихся в реакциях дейтерий-дейтериевого и дейтерий-тритиевого синтеза, показаны на рис. 1 для изотропного случая. Использована та же аналитическая модель изотропной функции распределений скоростей дейтронов и тритонов, что и в работе [9].

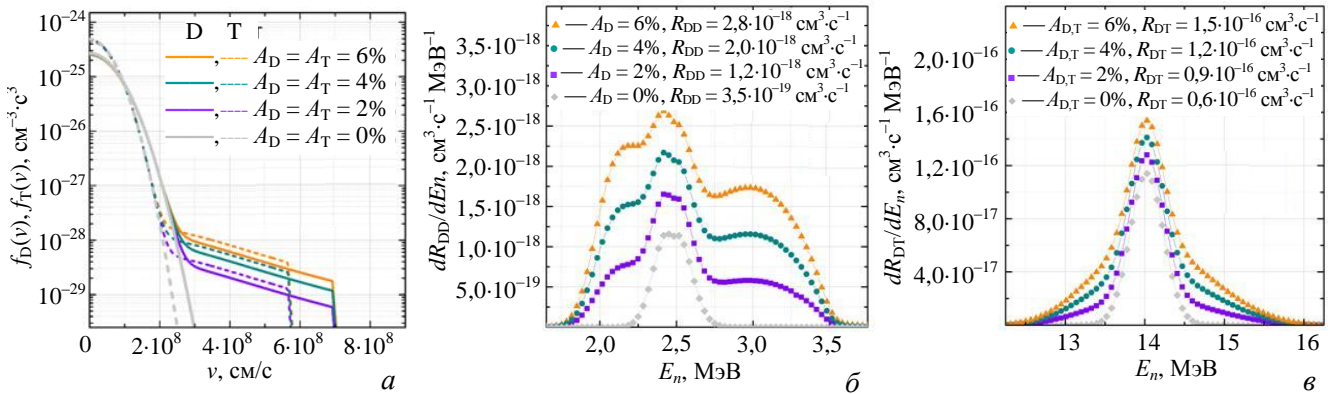


Рис. 1. Максвелловские (серый цвет) и немасвелловские распределения топливных ядер, соответствующие доле надтепловых частиц 2, 4, и 6% (а), спектры энергии нейтронов DD-синтеза (б), спектры энергии нейтронов DT-синтеза (в), соответствующие различным значениям доли надтепловых топливных ядер, $T_D = T_T = 8$ кэВ, $E_{inj} = 500$ кэВ

На рис. 1, а показаны четыре варианта функций распределения топливных ядер, соответствующие значениям доли надтепловых частиц 0, 2, 4 и 6% в максвелловской фоновой плазме при температуре 8 кэВ, энергии инжекции быстрых частиц 500 кэВ и значении электронной плотности $n_e = 10^{14}$ см⁻³. Соответствующие спектры нейтронов реакции $D(D, n)He^3$ показаны на рис. 1, б, спектры нейтронов реакции $T(D, n)He^4$ — на рис. 1, в. Значения полных реактивностей для каждого случая также указаны на рис. 1, б, в. При этом значения реактивностей, вычисленные как площади под спектральными кривыми, совпадают с значениями, вычисленными по формуле (5).

Анизотропный случай проиллюстрирован на рис. 2. Аналитическая модель для анизотропной функции распределений скоростей дейтронов и тритонов также соответствует работе [9]. Эта модель описывает замедление и угловое рассеяние быстрых частиц, инжектированных моноэнергетическим источником в максвелловскую фоновую плазму. Она выбрана в качестве примера, поскольку является быстрой, простой и легко воспроизводимой. Безусловно, приведённые здесь формулы для реактивностей и распределений продуктов реакций можно применять и к функциям распределений других видов, в частности, можно использовать численные решения, найденные в рамках более сложных моделей. Подробности можно найти в работе [23] и ссылках в ней.

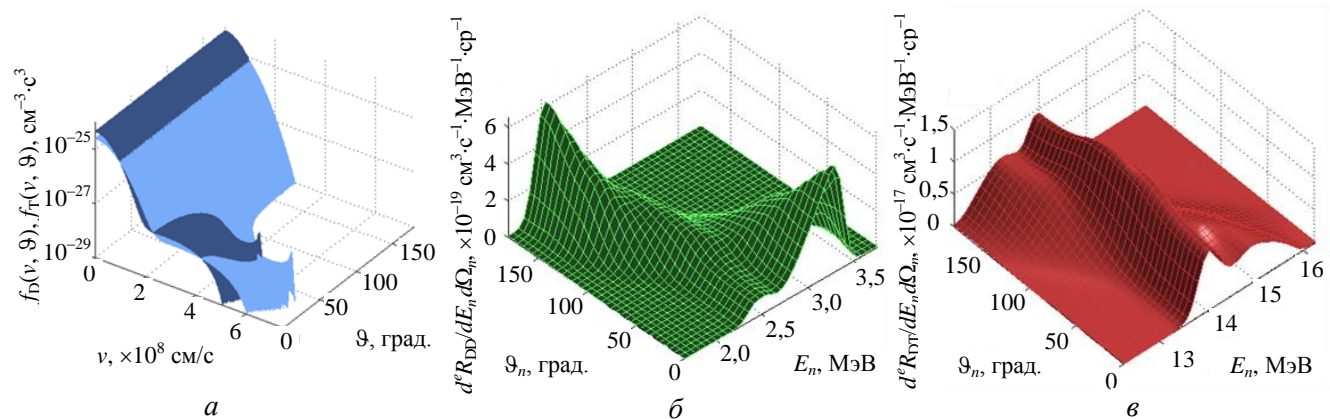


Рис. 2. Анизотропные немасвелловские распределения дейтронов (светлее) и тритонов (темнее), соответствующие энергии инжекции 500 кэВ, доле надтепловых частиц 5% и значению угла инжекции 30° (а); распределение нейтронов DD-синтеза по кинетическим энергиям и углам, $R_{DD} = 2,3 \cdot 10^{-18}$ см³·с⁻¹ (б); распределение нейтронов DT-синтеза по кинетическим энергиям и углам, $R_{DT} = 1,4 \cdot 10^{-16}$ см³·с⁻¹ (в)

На рис. 2, *а* показаны распределения скоростей дейтронов и тритонов, соответствующие доле надтепловых частиц 5% в максвелловской фоновой плазме при температуре 8 кэВ, энергии инжекции быстрых частиц 500 кэВ, значении угла инжекции 30° и значении электронной плотности $n_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Соответствующие угловые и энергетические распределения нейтронов реакции $D(D, n)\text{He}^3$ показаны на рис. 2, *б*, угловые и энергетические распределения нейтронов реакции $T(D, n)\text{He}^4$ — на рис. 2, *в*. Форма поверхностей, изображающих эти распределения, зависит как от распределений скоростей топливных ядер, так и от поведения дифференциальных сечений реакций синтеза.

Соответствующие значения полных реактивностей также указаны на рис. 2, *б*, *в*. При этом значения реактивностей, вычисленные путём интегрирования двойных дифференциальных распределений по углу и энергии, совпадают с значениями, вычисленными независимо по формуле (8), как и должно быть.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено дополненное доказательство аналитической формулы для вычисления реактивности в случае, когда функции распределения скоростей взаимодействующих частиц имеют вид разложений по полиномам Лежандра, по методу [16] и продемонстрировано совпадение с результатом [15]. Показано, что для найденных в работе [9] угловых и энергетических распределений продуктов ядерного синтеза выполняется условие нормировки на полную реактивность. Приведены примеры расчётов для изотропного и анизотропного случаев.

Данная работа была частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания № 1014 и проекта № 3.200.2014, а также Государственной корпорацией по атомной энергии «Росатом» в рамках контракта № Н.4х.44.90.13.1100. Результаты были получены с использованием вычислительных ресурсов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого и высокопроизводительного вычислительного кластера НИЦ «Курчатовский институт».

REFERENCES

1. **Velikhov E.P.** Fusion-fission hybrid systems and molten salt technologies in large-scale nuclear energy. O/3. — In: 25th IAEA Intern. Conf. on Fusion Energy. St. Petersburg, 13—18 October 2014.
2. **Kuteev B.V., Azizov E.A., Alexeev P.N., Ignatiev V.V., Subbotin S.A., Tsibulskiy V.F.** Development of DEMO-FNS tokamak for fusion and hybrid technologies. — Nuclear Fusion, 2015, vol. 55, p. 073035.
3. **Azizov E.A., Alexeev P.N., Kuteev B.V.** Update of Russian Federation roadmap. — In: 2nd IAEA DEMO Programme Workshop. Vienna, Austria, 17—20 December 2013.
4. **Alekseev P.N., Batyaev V.F., Golikov A.A., Gurevich M.I., Dudnikov A.A., Zhirkin A.V., Kuteev B.V., Pavlov K.V., Titarenko Yu.E., Titarenko A.Yu., Kievitskaya A.I., Fokov Yu.G.** Simulation of subcritical FNS-blankets for benchmark-experiments with the usage of neutron source based on I2 accelerator. Meeting on experimental-industrial hybrid installation (EIH) project and DEMO-FNS, NRC «Kurchatov Institute», Moscow, 16—17 February 2015 (in Russian).
5. **Kievitskaya A.I., Fokov Yu.G., Mazanik S.E., Burnos V.V., Rutkovskaya K.K., Edchik I.A., Kuteev B.V., Alekseev P.N., Titarenko Yu.E., Pavlov K.V., Zhirkin A.V.** The subcritical facility «YaLINA» to study neutronics of FNS-blankets. Meeting on experimental-industrial hybrid installation (EIH) project and DEMO-FNS, NRC «Kurchatov Institute», Moscow, 16—17 February 2015 (in Russian).
6. **Garofalo A.M., Abdou M.A., Canik J.M., Chan V.S., Hyatt A.W., Hill D. N., Morley N.B., Navratil G.A., Sawan M.E., Taylor T.S., Wong C.P.C., Wu W., Ying A.** A Fusion Nuclear Science Facility for a fast-track path to DEMO. — Fusion Engineering and Design, 2014, vol. 89, pp. 876—881.
7. **Wan B., Ding S., Qian J., Li G., Xiao B., Xu G.** Physics Design of CFETR: Determination of the Device Engineering Parameters. — IEEE Transactions on Plasma Science, 2014, vol. 42, pp. 495—502.
8. **Miyazawa J., Suzuki Y., Satake S., Seki R., Masaoka Y., Murakami S., Yokoyama M., Narushima Y., Nunami M., Goto T., Suzuki C., Yamada I., Sakamoto R., Yamada H., Sagara A.** FFHR Design Group.

- Physics analyses on the core plasma properties in the helical fusion DEMO reactor FFHR-d1. — Nuclear Fusion, 2014, vol. 54, p. 043010.
9. **Goncharov P.R.** Spectra of neutrons from a beam-driven fusion source. — Nuclear Fusion, 2015, vol. 55, p. 063012.
 10. **Tardocchi M., Nocente M., Gorini G.** Diagnosis of physical parameters of fast particles in high power fusion plasmas with high resolution neutron and gamma-ray spectroscopy. — Plasma Physics and Controlled Fusion, 2013, vol. 55, p. 074014.
 11. **Nocente M., Albergante M., Eriksson J. et al.** Neutron spectroscopy measurements of tritium beam transport at JET. — Nuclear Fusion, 2014, vol. 54, p. 104010.
 12. **Funaki D., Isoke M., Nishiura M., Sato Y., Okamoto A., Kobuchi T., Kitajima S., Sasao M.** Full orbit calculation for lost alpha particle measurement on ITER. — Review of Scientific Instruments, 2008, vol. 79, 10E512.
 13. **Jakobs M., Lopes Cardozo N., Jaspers R.** Fusion burn equilibria sensitive to the ratio between energy and helium transport. — Nuclear Fusion, 2014, vol. 54, p. 122005.
 14. **Drosg M., Schwerer O.** Production of monoenergetic neutrons between 0.1 and 23 MeV: neutron energies and cross-sections. — IAEA Technical Reports Series, 1987, № 273, STI/DOC/10/273.
 15. **Cordey J.G., Marx K.D., McCoy M.G., Mirin A.A., Rensink M.E.** A new expansion method for computing $\bar{\sigma v}$ for reactant distribution functions. — J. of Computational Physics, 1978, vol. 28, pp. 115—121.
 16. **Core W.G.F.** A note on the computation of thermonuclear reactivities in plasma-fusion applications. — Report JET-IR(87)11, 1987.
 17. **Watson G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd edition. Cambridge University Press, 1944.
 18. **Bauer G.** Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variablen. — J. für Die Reine und Angewandte Mathematik, 1959, vol. 56, pp. 101—121.
 19. **Arfken G.B., Weber H.J.** Mathematical Methods for Physicists. 6th edition. Elsevier Academic Press, 2005.
 20. **Lehner G., Pohl F.** Reaktionsneutronen als Hilfsmittel der Plasmadiagnostik. — Zeitschrift für Physik, 1967, vol. 207, pp. 83—104.
 21. **Bosch H.-S., Hale G.M.** Improved formulas for fusion cross-sections and thermal reactivities. — Nuclear Fusion, 1992, vol. 32, pp. 611—631.
 22. **Putvinskiy S.V.** Alpha-particles in tokamak. — In coll.: Voprosy teorii plazmy (Problems of Plasma Theory), 1990, issue 18 (Edited by Kadomtsev B.B.). — M.: Energoatomizdat (in Russian).
 23. **Goncharov P.R., Kuteev B.V., Ozaki T., Sudo S.** Analytical and semianalytical solutions to the kinetic equation with Coulomb collision term and a monoenergetic source function. — Physics of Plasmas, 2010, vol. 17, p. 112313.

AUTHORS

Goncharov P.R. Peter the Great Saint-Petersburg State Polytechnical University, Politehnicheskaya st. 29, 195251, St. Petersburg, Russia; p.goncharov@spbstu.ru

Received 20 May 2015
Problems of Atomic Science and Technology
Ser. Thermonuclear Fusion, 2015, vol. 38, issue 3, pp. 22—30.